Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: A. Pesce, M. Nesci

Tutorato del 24/4/2002

8.1 Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$. Dire se $[a, b]$ è compatto rispetto a ciascuna delle seguenti topologie su $\mathbb{R}$: $\mathcal{T}_e$, i_s, $\mathcal{T}_{cof}$, j_s.

8.2 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico con insieme supporto X infinito.

(i) Se $\mathcal{T} < \mathcal{T}_{cof}$, verificare che ogni sottoinsieme S di X è compatto rispetto a $\mathcal{T}$.

(ii) Se ogni sottoinsieme di $(X, \mathcal{T})$ è compatto, verificare che $(X, \mathcal{T})$ non è di Hausdorff (T_2).

8.3 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico metrizzabile.

(i) Verificare che ogni sottoinsieme compatto C di $(X, \mathcal{T})$ è chiuso e limitato.

(ii) Verificare che esistono sottoinsiemi chiusi e limitati di uno spazio metrizzabile $(X, \mathcal{T})$ che non sono compatti.

8.4 Verificare che l'insieme $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ delle matrici quadrate ortogonali di ordine n è un sottoinsieme compatto in $(\mathcal{M}(n, \mathbb{R}), \mathcal{T}_e)$, dove $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici quadrate di ordine n e dove $\mathcal{T}_e$ è la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^{n^2}$ tramite l'isomorfismo $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.

8.5 Si consideri lo spazio $(\mathbb{R}, j_d)$. Verificare che:

(i) $(\mathbb{R}, j_d)$ non è compatto;

(ii) gli intervalli $[a, b]$ di $(\mathbb{R}, j_d)$ non sono compatti;

(iii) preso $C \subset \mathbb{R}$, se $\mathrm{Int}(C) \neq \emptyset$ allora C non è compatto.

8.6 Sia $(X, \mathcal{T}_d)$ uno spazio metrizzabile con distanza d, e siano A, B sottoinsiemi chiusi non vuoti di X. Sia

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b).$$

(i) Dimostrare che se A o B sono compatti allora

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

(ii) Dare un esempio in cui $A \cap B = \emptyset$ e $d(A, B) = 0$.