Soluzioni tutorato V - Martedì 30 ottobre 2001

1. (a) Bisogna mostrare che $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ t.c. $\forall x \geq -2$ (dominio di f), con $0 < |x-2| < \delta$, si ha $|\sqrt{x+2}-2| < \epsilon$. Sia $\delta \leq 4$ in modo che $\sqrt{x+2}$ è sempre definita. Si ha quindi che $2 \leq \sqrt{x+2}+2$ (sarà utile in seguito). Procediamo con opportune maggiorazioni: $|\sqrt{x+2}-2| = \frac{|\sqrt{x+2}-2|}{|\sqrt{x+2}+2|}|\sqrt{x+2}+2| = \frac{|x-2|}{\sqrt{x+2}+2} \leq \frac{|x-2|}{2} < \frac{\delta}{2}$ Basta prendere allora $\delta = \min\{2\epsilon, 4\}$. Naturalmente era perfettamente lecito risolvere $|\sqrt{x+2}-2| < \epsilon\ \forall\epsilon > 0$ e verificare che $\forall\epsilon > 0$ esiste un intorno I di 2 in cui ogni $x \in$ I è soluzione della disequazione. Nel nostro caso, considerando per semplicità solo gli $\epsilon \leq 2$ si ha, posto $\gamma = \max\{\epsilon, 2\}$, I $= (\gamma^2 - 4\gamma + 2, \gamma^2 + 4\gamma + 2) \ni 2$

   (b) Bisogna mostrare che $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ t.c. $\forall x \neq 1$ (dominio di f), con $0 < |x-1| < \delta$, si ha $|f(x)| < \epsilon$. Procediamo con opportune maggiorazioni: $\left|x^2 + (x-1)\sin\frac{1}{x-1} - 2x + 1\right| \leq \left|(x-1)\sin\frac{1}{x-1}\right| + |x^2 - 2x + 1| = |x-1|^2 + |x-1|\left|\sin\frac{1}{x-1}\right| \leq |x-1|^2 + |x-1| < \delta^2 + \delta$. Per semplificare i calcoli sia $\delta \leq 1$ così che $\delta^2 + \delta \leq \delta + \delta = 2\delta$. Affinché la def. di limite sia verificata basta allora prendere $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{2}\right\}$.

   (c) Bisogna mostrare che $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}$ (dominio di f), con $0 < |x-1| < \delta$, si ha $|f(x) - 3| < \epsilon$. Procediamo con opportune maggiorazioni $|x+1+\cos(x-1)-3| = |x-1+\cos(x-1)-1| \leq |x-1| + |\cos(x-1)-1| = |x-1| + \frac{|\cos(x-1)-1|}{(x-1)^2}(x-1)^2 = |x-1| + \frac{|\cos^2(x-1)-1|}{(x-1)^2}\frac{(x-1)^2}{|1+\cos(x-1)|} = |x-1| + \frac{|\sin^2(x-1)|}{(x-1)^2}\frac{(x-1)^2}{|1+\cos(x-1)|}$ (*). Supponendo $\delta \leq 1$ così che $1 < |1+\cos(x-1)|$ e $\delta^2 \leq \delta$ (servirà in seguito), si ha: (*) $\leq |x-1| + \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^2 (x-1)^2$ (**). Poiché $\sin^2\alpha \leq \alpha^2$ si ha (**)$\leq |x-1| + (x-1)^2 < \delta + \delta^2 \leq 2\delta$. Quindi la definizione di limite è verificata se si prende $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{2}, 1\right\}$.

2. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{1/x}\ \forall\alpha \in \mathbb{R} = e^\alpha$ Infatti si ricordi che $\lim_{y\to\pm\infty}(1+\alpha/y)^y = e^\alpha$ e si ponga $x = \frac{1}{y}$.

   (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

   (c) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$ (porre $y = x-1$ e ricondursi all'es. precedente).

   (d) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ (porre $y = e^x$ e ricondursi all'es. precedente).

   (e) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$

(f) $\lim_{x\to 0}(\ln(\tan^4 x+1))\left(e^{2\sin^4 x}-1\right)^{-1}=\frac{1}{2}$

(g) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\ln(1+x)}{e^x-1}=1$

(h) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=1$

(i) $\lim_{x\to -\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=-1$

(j) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\cos x}{4x-\sin x}=\frac{1}{4}$ Infatti $\frac{x+\cos x}{4x-\sin x}=\frac{1+(\cos x)/x}{4-(\sin x)/x}$ che ha limite $\frac{1}{4}$ per x che tende a $+\infty$.

(k) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x}=\frac{\pi}{2}$ Infatti $\sin(\pi\cos x)=\sin(\pi-\pi\cos x)=\sin(\pi(1-\cos x))$. Si ha quindi che $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x}=$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi(1-\cos x))}{\pi(1-\cos x)}\pi\frac{1-\cos x}{x\cdot x}\frac{x}{\sin x}=1\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$

(l) $\lim_{x\to 0}\left(\sin x^2\right)^{1/\log_5 x^2}=5$. Infatti si ponga $y=\frac{1}{\log_5 x^2}$. Si ha $\lim_{y\to 0}\left(\sin 5^{1/y}\right)^y=\lim_{y\to 0}(5^{(1/y)})^y\cdot\left(\frac{\sin 5^{1/y}}{5^{1/y}}\right)^y=5\cdot 1^0=5.$

3. (a) Dominio: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
$f(x)$ è continua nel suo insieme di definizione $\forall n\in\mathbb{N}$, essendo composizione, somma e rapporto di funzioni continue in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Siccome $\lim_{x\to 0^-}\frac{n+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}=\frac{n}{3}$ (visto che $\lim_{x\to 0^-}2^{1/x}=0$) mentre $\lim_{x\to 0^+}\frac{n+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}=1$ (per verificarlo dividere num. e den. per $2^{1/x}$ e notare che $\lim_{x\to 0^+}2^{1/x}=+\infty$), si ha che $f(x)$ può essere estesa ad una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, ponendo $f(0)=1$, se, e solo se, $n=3$.

   (b) Dominio: $\mathbb{R}$
Codominio: $[0,+\infty)$
Visto che $\lim_{x\to 0^+}\frac{A^x-1}{x}=\ln A$, f(x) è continua $\Leftrightarrow A=1$.