Università degli Studi Roma Tre -
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002
TE1 (Teoria di Galois) - Prof. S. Gabelli
Prima prova di valutazione intermedia -12 Marzo 2002

1. Determinare il campo di spezzamento K su $\mathbb{Q}$ del polinomio
$$f(X) := X^4 + 9 \in \mathbb{Q}[X].$$
Determinare inoltre:
   (a) il grado di K su $\mathbb{Q}$;
   (b) un elemento primitivo di K su $\mathbb{Q}$;
   (c) il gruppo degli automorfismi di K .

2. Determinare il campo di spezzamento K su $\mathbb{Z}_2$ del polinomio
$$f(X) := X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[X].$$

3. Stabilire, motivando brevemente le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false:
   (a) Il campo $\mathbb{C}(X)$ è algebrico su $\mathbb{R}(X^2)$, dove X è una indeterminata su $\mathbb{C}$.
   (b) I campi $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ sono isomorfi.
   (c) Il grado di $\pi + \frac{1}{\pi}$ su $\mathbb{Q}(\pi^2)$ è finito.
   (d) Se $m \neq n$, il grado di $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[m]{2})$ su $\mathbb{Q}$ è mn.
   (e) Un elemento primitivo per $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$ su $\mathbb{Q}$ è $\sqrt{3}\sqrt[3]{2}$.

4. Definire le seguenti proprietà di un ampliamento di campi $F \subseteq K$:
   (a) K è finitamente generato su F;
   (b) K è finito su F;
   (c) K è algebrico su F.

   Stabilire inoltre quali implicazioni valgono tra queste proprietà e illustrare con controesempi quelle che non valgono.