Tutorato di TE1 - Teoria delle Equazioni

Andrea Susa

20 marzo 2002

(1) Sia $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio, ed indichiamo con $\mathbb{K}(f)$ il suo campo di spezzamento. Determinare il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}(f) : \mathbb{Q})$ dei seguenti polinomi, e specificare a quale gruppo finito è isomorfo:
(a) $f(x) = x^2 - 7$;
(b) $f(x) = x^3 - 3$;
(c) $f(x) = x^5 - 1$;
(d) $f(x) = x^4 - 2$.

(2) (a) Descrivere la struttura del campo finito $\mathbb{F}_{3^4}$ e dei suoi sottocampi.
(b) Stabilire se esistono polinomi di grado $2, 3, 4, 5, \cdots$ irriducibili su $\mathbb{F}_3$ che hanno radici in $\mathbb{F}_{3^4}$ e, in caso affermativo, determinarne almeno uno.
(c) Descrivere il gruppo di Galois dei polinomi trovati in (b).

(3) Sia f un polinomio in $\mathbb{F}_p[x]$, e $\mathbb{K}(f)$ il suo campo di spezzamento. Mostrare che $\# \, \mathbb{K}(f) = p^m$, dove m è il minimo comune multiplo dei gradi dei fattori irriducibili di f in $\mathbb{F}_p$.

(4) Mostrare le seguenti affermazioni:
(a) se $\varphi(n) = 2$, allora il polinomio $x^n - 1$ si spezza completamente in $\mathbb{Q}$, oppure il suo campo di spezzamento ha dimensione 2 su $\mathbb{Q}$.
(b) Sia $\xi_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$. Mostrare che le $\varphi(n)$ radici primitive n-esime *non* costituiscono una base per $\mathbb{Q}(\xi_n)$.