

Tutorato di TN1 - Teoria dei Numeri

Andrea Susa

6 maggio 2002

(1) Dopo aver determinato (senza usare le tavole) una radice primitiva di $p = 19, 23, 31, 41$, calcolare i seguenti simboli di Legendre verificando direttamente se sono residui quadratici:

- (a) $\left(\frac{1}{p}\right)$;
- (b) $\left(\frac{-1}{p}\right)$;
- (c) $\left(\frac{2}{p}\right)$;
- (d) $\left(\frac{3}{p}\right)$;
- (e) $\left(\frac{\pm 4}{p}\right)$.

(2) Determinare tutti i residui quadratici di 17.

(3) Dato n un residuo quadratico di p primo dispari, provare che:

- (a) n non è una radice primitiva di p ;
- (b) $p - n$ è un non-residuo quadratico di p se e soltanto se $p \equiv 1 \pmod{4}$;
- (c) $p - n$ è un residuo quadratico di p se e soltanto se $p \equiv 3 \pmod{4}$.

(4) Calcolare i seguenti simboli di Legendre, rispetto ai primi indicati:

- (a) $\left(\frac{\pm 5}{p}\right)$, con $p = 11, 13, 17, 19$;
- (b) $\left(\frac{\pm 8}{p}\right)$, con $p = 13, 17, 19$;
- (c) $\left(\frac{-38}{p}\right)$, con $p = 13, 17, 19$.

(5) (a) Verificare che, per $p = 5$, tutti i non-residui quadratici sono radici primitive.

(b) Analogamente per $p = 17$.

(c) Dimostrare che tutti i non-residui quadratici sono radici primitive per tutti i primi della forma $p = 2^k + 1$.