Tutorato di TN1 - Teoria dei Numeri

Andrea Susa

13 maggio 2002

(1) Calcolare i seguenti simboli di Legendre facendo anche uso della Legge di Reciprocità Quadratica:
(a) $\left(\frac{\pm 71}{73}\right)$;
(b) $\left(\frac{\pm 219}{383}\right)$;
(c) $\left(\frac{\pm 461}{773}\right)$;
(d) $\left(\frac{\pm 1234}{4567}\right)$;
(e) $\left(\frac{\pm 3658}{12703}\right)$.

(2) Sia p un primo dispari e siano a, b tali che $(a, p) = (b, p) = 1$. Consideriamo le seguenti congruenze:

$$x^2 \equiv a \pmod{p}, \qquad x^2 \equiv b \pmod{p}, \qquad x^2 \equiv ab \pmod{p}.$$

Mostrare che, o tutte le congruenze sono simultaneamente risolubili, oppure solamente una di esse è risolubile.

(3) Dato n un residuo quadratico di p primo dispari, provare che:
(a) se $ab \equiv n \pmod{p}$, allora o a e b sono entrambi residui quadratici di p o sono entrambi non-residui quadratici;
(b) se anche n_1 è un residuo quadratico di p (con n_1 uguale ad n eventualmente), allora la congruenza $nx^2 \equiv n_1 \pmod{p}$ ha soluzione;
(c) se a, b sono non-residui quadratici di p, allora la congruenza $ax^2 \equiv b \pmod{p}$ ha soluzione. *(Sugg. vedi Es. 2)*

(4) Provare che, per ogni primo $p > 5$, esistono $a, b \in \{1, \cdots, p-1\}$ tali che:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a+1}{p}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{b+1}{p}\right) = -1$$

Dedurre da ciò che, per ogno primo $p > 5$ esistono almeno due residui quadratici consecutivi e almeno due non-residui quadratici consecutivi.