Tutorato di TN1 - Teoria dei Numeri

Andrea Susa

25 marzo 2002

(1) Trovare le (eventuali) soluzioni delle seguenti congruenze polinomiali:
(a) $2x^2 + 5x - 9 \equiv 0 \pmod{30}, \pmod{101}$;
(b) $x^4 + 2 \equiv 0 \pmod{12}, \pmod{30}$;
(c) $x^4 + 4x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{12}, \pmod{30}$.

(2) Trovare le (eventuali) soluzioni delle seguenti congruenze polinomiali:
(a) $x^2 \equiv 7 \pmod{3^3}$;
(b) $x^2 \equiv 14 \pmod{5^3}$;
(c) $x^2 \equiv 2 \pmod{7^3}$;
(c) $x^2 \equiv 31 \pmod{11^4}$.

(3) Dimostrare che, se $\mathrm{MCD}(m, n) = d > 1$, e posto $l =$m.c.m.(m, n), allora il sistema

$$\begin{cases} X \equiv a \pmod{n} \\ X \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

è risolubile se e soltanto se $d \mid a - b$. In particolare il sistema ammette un'unica soluzione $\pmod{l}$.

(4) Provare le seguenti affermazioni:
(a) Se p, q sono primi distinti, $a \in \mathbb{Z}$ tale che $p - 1 \mid q - 1$ e $\mathrm{MCD}(a, pq) = 1$, allora

$$a^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

(b) Per ogni p, q primi distinti vale:

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$