

## Lavoro Guidato N6

**Esercizio 1** Sia  $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 - \frac{t^2}{x^2}} dx$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

- Verificare che  $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .
- Mostrare la relazione  $F'(t) = -2F(t)$  per  $t > 0$ .
- Calcolare esplicitamente il valore di  $F(t)$ .

**Esercizio 2** Sia  $G(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx) dx$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

- Verificare che  $G(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .
- Mostrare la relazione  $G'(t) = -\frac{tG(t)}{2}$  per qualsiasi  $t \in \mathbf{R}$ .
- Calcolare esplicitamente il valore di  $G(t)$ .

**Esercizio 3** Sia  $F(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx} dx$ ,  $t \geq 0$ .

- Trovare l'espressione integrale per  $F'(t)$  e  $F''(t)$ .
- Calcolare esplicitamente  $F''(t)$ .
- Mostrare che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F'(t) = 0$ .
- Usando il punto (c), calcolare esplicitamente  $F(t)$ .
- Calcolare il valore degli integrali  $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$  e  $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-2x} dx$ .