

ESERCIZIO 1. Enunciare e dimostrare il teorema di Ljapunov.

ESERCIZIO 2. Data la funzione $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$H(x, y) = y(x^2 + y^2 - 2y),$$

si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

(2.1) Determinare i punti d'equilibrio del sistema.

(2.2) Discuterne la stabilità.

(2.3) Studiare le curve di livello della funzione $H(x, y)$.

(2.4) Utilizzare i risultati precedenti per lo studio qualitativo delle le traiettorie del sistema.

ESERCIZIO 3. Sistemi rigidi: definizione e gradi di libertà.

ESERCIZIO 4. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muova nel piano (x, y) lungo una guida di equazione $y = x^2$ in modo tale che la sua coordinata x al tempo t sia data da $x(t) = t \cos t$. L'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z , mentre l'asse ξ si mantiene sempre tangente alla guida; all'istante iniziale $t = 0$ i due sistemi di riferimento coincidono.

Un punto materiale P di massa $m = 1$ è fermo nel sistema K nel punto di coordinate $(1, 0, 0)$.

(4.1) Scrivere la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , i.e. $D = C \circ B$, e determinare C e B .

(4.2) Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} .

(4.3) Determinare la velocità relativa \mathbf{v}' .

(4.4) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .

(4.5) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .