Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003
Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: L. Di Biagio, P. Tranquilli

Tutorato del 19/3/2003

3.1 Sia X un insieme. Sia $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_{con}}$ la seguente famiglia di parti di X:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{T}_{con}} := \{C \subset X : |C| \leq |\mathbb{N}|\} \cup \{X\}.$$

Verificare che esiste una topologia $\mathcal{T}_{con}$ su X che ha $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_{con}}$ come famiglia di chiusi. Confrontare inoltre la topologia $\mathcal{T}_{con}$ con la topologia $\mathcal{T}_{cof}$ (topologia cofinita) su X.

3.2 Sia $S := \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Determinare la chiusura $\overline{S}$ di S rispetto alle seguenti topologie di $\mathbb{R}$: $\mathcal{T}_{cof}$, i_s, i_d, $\mathcal{T}_e$, j_s, j_d.

3.3 Sia $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \in \mathbb{Q}, y > 0\}$. Determinare $\mathrm{Int}(S)$, $\mathrm{Est}(S)$, $\mathrm{Fr}(S)$, $\overline{S}$, $D(S)$ rispetto alla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

3.4 Sia $A := (a, b] \cup \{2b\}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Determinare $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Est}(A)$, $\mathrm{Fr}(A)$, $\overline{A}$, $D(A)$ rispetto alla topologia j_d di $\mathbb{R}$.

3.5 Sia A un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Dimostrare che

(i) $\mathrm{Fr}(A) \supset \mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A))$;

(ii) $\mathrm{Fr}(A) \supset \mathrm{Fr}(\mathrm{Est}(A))$;

(iii) $\mathrm{Fr}(A) \supset \mathrm{Fr}(\overline{A})$).

Dare degli esempi in cui valgono le inclusioni strette.

3.6 Siano A, B sottoinsiemi di uno spazio topologico X. Verificare:

(i) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$;

(ii) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$, $\quad \mathrm{Int}(A \cup B) \supset \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$;

(iii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(iv) $\mathrm{D}(A \cap B) \subset \mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(B)$, $\quad \mathrm{D}(A \cup B) = \mathrm{D}(A) \cup \mathrm{D}(B)$.

Trovare esempi in cui le inclusioni precedenti sono strette.