

**E 6.** Fluttuazioni nel lancio di una moneta.

Una moneta (equa) viene lanciata  $N$  volte (per esempio  $N = 10^4$ ). Il giocatore  $A$  ottiene un punto ogni volta che il lancio dà “testa”. Il giocatore  $B$  ottiene un punto ogni volta che il lancio dà “croce”.

1. Si calcoli la frazione di tempo  $v$  in cui il giocatore  $A$  è in vantaggio sul giocatore  $B$ . Contrariamente a una concezione ingenua delle fluttuazioni si osserverà che i valori tipici di  $v$  non si avvicinano (nemmeno per  $N$  molto grande) al valor medio  $\frac{1}{2}$ .

2. Si ripeta l'esperimento  $M$  volte e si indichino con  $v_1, v_2, \dots, v_M$  le frequenze corrispondenti. Si ponga, al solito  $S_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M v_i$ . Visualizzando l'andamento di  $S_M$  al crescere di  $M$  si osserverà che  $S_M \sim \frac{1}{2}$ , il che restituisce, in parte, l'intuizione perduta.

3. Siano  $v_1, v_2, \dots, v_M$  come sopra e si costruisca un istogramma delle frequenze come segue. Suddividiamo l'intervallo  $[0, 1]$  in  $\Delta$  (per es.  $\Delta = 100$ ) parti uguali e calcoliamo la frazione di esperimenti che fornisce un valore della frequenza nei vari intervalli:

$$f(k) = \frac{\Delta}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{I}(v_i \in [\frac{k}{\Delta}, \frac{k+1}{\Delta})), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \Delta - 1$$

Fissato  $M$  (per es.  $M = 10^5$ ) si grafichi  $f$  al variare di  $k$  fra 0 e  $\Delta - 1$ . Si osservi la concentrazione intorno agli estremi.

4. Si osservi che l'istogramma approssima (sempre meglio al crescere del parametro  $\Delta$ ) la densità di probabilità

$$\frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}, \quad x \in [0, 1].$$

Questa è nota come *legge dell'arcoseno*.

**Suggerimenti**

Siano  $X_1, \dots, X_N$  bernoulliane indipendenti di parametro  $p = \frac{1}{2}$  (i risultati degli  $N$  lanci di una moneta). Ponendo  $Y_i = 2X_i - 1$  si ha  $+1$  se vince  $A$  e  $-1$  se vince  $B$ . Al tempo  $k = 1, 2, \dots, N$  il bilancio tra i due giocatori è dato da

$$Z_k = \sum_{i=1}^k Y_i = \#(\text{vincite } A) - \#(\text{vincite } B)$$

e diremo che  $A$  è in vantaggio se  $Z_k > 0$ . Quindi  $v$  si può calcolare mediante la formula

$$v = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{I}(Z_k > 0) + \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \mathbb{I}(Z_k = 0).$$

Qui il secondo termine è stato aggiunto per motivi di simmetria (altrimenti non è esatto dire che  $S_M \rightarrow \frac{1}{2}$ ). Ripetendo  $M$  volte l'esperimento si ottengono i valori di  $S_M$  e dell'istogramma  $f(k)$ . Per il calcolo di  $f(k)$  si deve fare attenzione a non escludere gli estremi  $v = 0, v = 1$ . L'espressione data nel testo per esempio include  $v = 0$  ma esclude  $v = 1$ . Si consiglia quindi di correggerla aggiungendo il valore  $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{I}(v_i = 1)$  alla variabile  $f(\Delta - 1)$ . Per una discussione dettagliata della legge dell'arcoseno rimandiamo al libro di W. Feller.