

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica a.a. 2003/2004**  
**ALGEBRA 1**  
**Prof.M.Fontana**  
**Tutorato 1 - Andrea Cova (3 ottobre 2003)**

1. Sia  $A$  un insieme qualsiasi, definiamo:  
 $P(A) := \{X : X \text{ è un sottoinsieme di } A\}$ .  
Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , stabilire se le seguenti identità sono sempre vere:  
 $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ ;  $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ .
2. Sia  $X$  un insieme non vuoto. Presi comunque due sottoinsiemi  $A, B$  di  $X$  si ponga:  
 $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  (differenza simmetrica).  
Dati  $A, B, C$  tre sottoinsiemi di  $X$ , dimostrare che:  
 $(A \Delta B) \setminus C = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C)$ .
3. Se  $A, B, C$  sono sottoinsiemi di un insieme fissato  $X$ , allora determinare quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:  
(a) risulta sempre  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ ;  
(b) non si ha mai che  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ ;  
(c) se  $C \subset A$  allora  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .
4. Supponiamo che siano 500 gli studenti del primo anno del Corso di Laurea in Matematica. Supponiamo che, tra loro, 450 conoscano l'inglese e 120 il francese. Supponiamo inoltre che ogni studente conosca almeno una di queste due lingue. Determinare il numero degli studenti che conoscono entrambe le lingue.  
[ Suggesto :: Sia  $S$  un insieme finito (cioè con un numero finito di elementi). Denotiamo con  $\text{Card}(S)$  il numero degli elementi distinti di  $S$ . Sia  $X$  un insieme finito ed  $A$  e  $B$  due sottoinsiemi di  $X$ . Allora si ha che:  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ . ]
5. Supponiamo che si conoscano le seguenti informazioni su un dato insieme non vuoto  $X$  di persone:  
(1) Alcuni di coloro che amano i cani non amano i gatti;  
(2) Alcuni di coloro che non amano i canarini amano i cani  
Stabilire se le seguenti affermazioni possono essere dedotte da tali informazioni.  
(a) Esiste almeno una persona che non ama i canarini e non ama i gatti;  
(b) Esiste almeno una persona che non ama i canarini ed ama i gatti.
6. Sia  $S$  un insieme non vuoto. Nell'insieme  $X := P(S)$  si considerino gli insiemi  $A, B$  e  $C$   
Mostrare che:  
(a)  $A \Delta B = B \Delta A$  (b)  $A \Delta \emptyset = A$ ; (c)  $A \Delta A = \emptyset$ ; (d)  $(A \Delta B)^* = (A^* \cap B^*) \cup (A \cap B)$ ;  
(e)  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ ; (f)  $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ ; (g)  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ .  
(dove con  $A^*$  si denota l'insieme complementare  $S \setminus A$ )