

Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 7 – Andrea Cova (25 novembre 2003)

1. Risolvere i seguenti sistemi di congruenze:

(a)

$$\begin{aligned} 2X &\equiv 4 \pmod{9} \\ 7X &\equiv 5 \pmod{10} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 6X &\equiv 4 \pmod{8} \\ 4X &\equiv 1 \pmod{7} \\ 7X &\equiv 8 \pmod{15} \end{aligned}$$

2. Determinare quali tra le seguenti applicazioni sono suriettive, quali iniettive e quali biettive: Determinarne anche un'inversa a destra f'' se suriettiva, un'inversa a sinistra f' se iniettiva, l'inversa f^{-1} se biettiva:

(a) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = 2x + 3$$

(b) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$

$$f(x) = |x|$$

(c) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = 1/x$$

(d) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = x|x|$$

(e) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z} \times [0, 1]$

$$f(x) = ([x], x - [x])$$

(f) $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ è pari} \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & \text{altrimenti} \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(g) $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } 3 \mid x \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } 3 \mid x \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3. Data un'applicazione $f : X \rightarrow X$, si definisca la seguente relazione:

$$x \rho y \Leftrightarrow y = f(x)$$

Si dimostri che

(a) ρ è riflessiva $\Leftrightarrow f = \text{id}_X$;

(b) ρ è simmetrica $\Leftrightarrow f \circ f = \text{id}_X$;

(c) ρ è transitiva $\Leftrightarrow f \circ f = f$;

(d) ρ è antisimmetrica $\Leftrightarrow (x \text{ punto fisso di } f \circ f \Leftrightarrow x \text{ punto fisso di } f)$.

4. Determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinché, se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, sia:

(a) $g \circ f$ iniettiva;

(b) $g \circ f$ suriettiva;

(c) $g \circ f$ biettiva.