Tutorato di AM1a

Continuità semplice ed uniforme

Fabrizio Fanelli

1)Determinare α e β in modo che la funzione $f(x) : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da :

$$f(x) \equiv \begin{cases} x^\alpha \sin^2 x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ |x|^\beta \cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right) & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Sia continua.

Soluzione. devo verificare quando il limite destro e sinistro per $x \rightarrow 0$ valgono entrambi zero :$\alpha > 2$ e $\beta.0$

2)Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio a coefficenti reali , di grado pari. Se $a_0 < 0$ e $a_n > 0$, dimostrare che $P(x)$ ammette almeno due radici , una positiva e una negativa.

Soluzione. osservo che i limiti a + e - infinito valgono $= \infty$ e che $P(0) < 0$ allora applicando 2 volte il teorema degli zeri segue l'asserto.

3)Verificare se le seguenti funzioni sono uniformemente continue :

a)$f(x) = e^x \quad x \in (-\infty, 1)$

Soluzione. $|e^x - e^y| < e\,|e^{x-y} - 1| < e\,|x-y|\,\epsilon < e\delta\epsilon$ se $|x-y| < \delta$. Ho sfruttato il limite notevole $\lim_{x \to o} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

b)$f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{1+x^2}{x^2}\right) \quad x \in [1, +\infty) \quad x \in [1,2] \quad x \in (0,1)$

Soluzione. i)è continua in tutto l'intervallo ed ha un asintoto orizzontale allora è u.c.

ii) è continua in un compatto allora è u.c

iii)è estendibile ad una funzione continua nell'intervallo chiuso allora è u.c.

c)$f(x) = \sqrt{x} \quad x \in [a, +\infty)$

Soluzione. ha derivata limitata allora è u.c.

d)$f(x) = \frac{xe^x}{|x|} \quad x \in [1, 0)$

Soluzione. è estendibile ad una funzione continua nell'intervallo chiuso (compatto) allora è u.c.

e)$f(x) = x \log x \quad x \in (0, 3]$

Soluzione. come sopra

f)$f(x) = \arctan \frac{1}{x} \quad x \in (-1, 0)$

Soluzione. come sopra

g)$f(x) = \arctan \frac{1}{x} \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

Soluzione. non è estendibile con continuità in 0 alora non è neanche u.c.

h)$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad x \in [1, +\infty)$

Soluzione. u.c. perchè la derivata è limitata

i)$f(x) = \sin x \quad x \in [1, +\infty)$

Soluzione. come sopra

l)$f(x) = x\sqrt{x} \quad x \in [1, +\infty)$

Soluzione. uso il teorema della farfalla per far vedere che non è u.c.

m)$f(x) = x + \frac{\sin x^2}{x} \quad x \in [1, +\infty)$

Soluzione. u.c. perchè ha derivata limitata