Tutorato di AM1a

Estremo superiore ed estremo inferiore

Fabrizio Fanelli

Calcolare estremo superiore ed inferiore dei seguenti insiemi:

1. $\{x \in \mathbb{Q} : 4 < x^2 \leq 9\}$.

2. $\{p^2 \ : \ p \in \mathbb{Z}\}$.

3. $\{p^3 \ : \ p \in \mathbb{Z}\}$.

4. $\left\{x = \frac{1}{n+3} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

5. $\left\{x = \frac{3n}{4n^2+1} \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

6. $\left\{x = (-1)^n \frac{n^2-5n}{n+2} \cos(n\pi)\right\}$

Dimostrare che:

A) Ogni insieme A, chiuso e limitato ha Massimo e Minimo.

B) Se A è limitato superiormente e $\sup A \notin A$, allora $\sup A$ è un punto di accumulazione di A (quindi $\sup A \in \overline{A}$).

Provare che:

1. $\sup X \geq \sup Y \geq \inf Y \geq \inf X$ se $\mathbb{R} \supset X \supset Y \neq \emptyset$.

   Soluzione. $\sup Y \geq y \geq \inf Y \forall y \in Y \Rightarrow \sup Y \geq \inf Y$. $\sup X \geq x \forall x \in X$, ma $Y \subset X \Rightarrow \sup X \geq \sup Y$, perché è un maggiorante. Similmente otteniamo che $\inf Y \geq \inf X$

2. $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$ dove $\mathbb{R} \supset X, Y \neq \emptyset$ e $X + Y := \{x + y : x \in X, y \in Y\}$.

Soluzione. Ovviamente $\sup X + \sup Y$ è un maggiorante. Dobbiamo far vedere che è il più piccolo, ovvero che:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists x + y \in X + Y \;:\; x + y > \sup X + \sup Y.$$

Ma dalla definizione di $\sup X$ e $\sup Y$ segue che esistono x e y tali che $x > \sup X - \frac{\epsilon}{2}$ e $y > \sup Y - \frac{\epsilon}{2}$, allora, sommando membro a membro ho che: esiste $x + y$ tale che $x + y > \sup X + \sup Y - \epsilon$.

3. $\sup(tX) = t \sup X$ se $tX := \{tx : x \in X\}, \forall t \in \mathbb{R}^+$, e se $\mathbb{R} \supset X \neq \emptyset$.

   Soluzione. Se M è un maggiorante di X allora tM è un maggiorante di tX. Dalla definizione di $\sup X$ segue che scelto $\frac{\epsilon}{t}$ $\exists x \in X \;:\; x > \sup X - \frac{\epsilon}{t}$, se moltiplichiamo ambo i membri per t otteniamo che $tx > t \sup X - \epsilon$. Allora $t \sup X$ è il sup di tX.

Verificare che: un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato $\Leftrightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $|x| < M, \forall x \in X$.

Soluzione. Dimostriamo la freccia verso destra ($\Rightarrow$): X limitato, quindi $\exists L, l \;:\; l \leq x \leq L \forall x \in X$, sia $M := \max\{|l|, |L|\}$, abbiamo che $L \leq |L| \leq M$ e $l \geq -|l| \geq -M \Rightarrow -M \geq x \geq M \forall x \in X \Rightarrow |x| < M$.
($\Leftarrow$) :Se $|x| \leq M \forall x \in X \Rightarrow -M \geq x \geq M$ quindi abbiamo trovato un minorante ed un maggiorante.

Verificare che: $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ è irrazionale $\forall n \in \mathbb{N}$ supponendo che $\sqrt{m}$ sia irrazionale con $m \in \mathbb{N}$.

Soluzione. se $a = \sqrt{m} + \sqrt{n}$ fosse razionale, anche a^2 lo sarebbe. $a^2 = m + n + 2\sqrt{m}\sqrt{n} = 2\sqrt{m}(\sqrt{m} + \sqrt{n}) - m + n$, poiché $\sqrt{m}$ è irrazionale, lo è anche $2\sqrt{m}(\sqrt{m} + \sqrt{n})$, allora abbiamo un assurdo!