

# Tutorato IX

1/12/2003

Differenziabilità

**Esercizio 1.** Calcolare  $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_i}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.** Si consideri la seguente funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x_1 x_2|^\alpha}{|x|^\beta} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché:

- (i)  $f$  sia continua nell'origine;
- (ii)  $f$  abbia derivate direzionali nell'origine;
- (iii)  $f$  sia differenziabile nell'origine.

**Esercizio 3.** Per  $x \in \mathbb{R}^2$ , sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|^2 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

- (i) Dimostrare che  $f \in C(\mathbb{R}^2)$  e discutere la differenziabilità di  $f$ ;
- (ii) Trovare un numero positivo  $\delta$  per il quale se  $|x - x_0| < \delta$  allora  $|f(x) - f(x_0)| < 1/100$ , con  $x_0$  tale che  $|x_0| = 1$ ;
- (iii)  $f$  è differenziabile nel punto  $(\sqrt{2}, 1)$ ?

**Esercizio 4.** Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} y e^{-\left(\frac{y}{x-1}\right)^2} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

- (i) Studiare la continuità e regolarità di  $f$  in  $(1, 0)$ ;
- (ii) Trovare  $\delta > 0$  tale che  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < 1/100$  per  $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$  con  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  e (qualora  $f$  fosse continua in  $(1, 0)$ ) con  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ .

**Esercizio 5.** Studiare la regolarità di

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x \neq 0 \\ y & \text{se } x = 0. \end{cases}$$