

Tutorato del 24/3/2004

1.1 Verificare che

$$(1, 1, 1) (1, 2, 3) (2, -1, 1)$$

sono una base per \mathbb{R}^3 .

1.2 Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 . Verificare se le seguenti formano una base per V :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Trovare una base e determinare la dimensione del sottospazio W di \mathbb{R}^4 generato dai seguenti vettori:

$$u = (1, -4, -2, 1)$$

$$v = (1, -3, -1, 2)$$

$$w = (3, -8, -2, 7)$$

1.4 Dire quali delle seguenti affermazioni e' falsa, giustificando la scelta anche con esempi. Giustificare perche' si considerano le altre vere:

1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Allora ogni n -upla b_1, \dots, b_n di vettori linearmente indipendenti e' una base di V .

2) Siano d_1, \dots, d_n elementi di uno spazio vettoriale V e siano b_1, \dots, b_n elementi del sottospazio $\langle d_1, \dots, d_n \rangle$.

Allora

$$\langle b_1, \dots, b_n \rangle \subseteq \langle d_1, \dots, d_n \rangle$$

3) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di V e' un sottospazio di V .

4) L'unione di due sottospazi vettoriali di V e' un sottospazio vettoriale di V .

1.5 Quale dei seguenti insiemi di vettori e' una base per \mathbb{R}^3 :

$$1) (1, 0, 1), (0, 1, 0), (2, 2, 2)$$

$$2) (1, \sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, 2, 2), (2\sqrt{2}, 4, 4)$$

$$3) (2, 2, 2), (1, 2, 2), (1, 1, 2)$$

1.6 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano b_1, \dots, b_m elementi di V . Quale delle seguenti affermazioni è falsa e spiegarne il motivo. Spiegare perché si ritengono vere le altre:

1) Se b_1, \dots, b_m sono linearmente indipendenti allora $m \leq n$ ed esistono vettori b_{m+1}, \dots, b_n tali che b_1, \dots, b_n sono una base di V .

2) b_1, \dots, b_m sono generatori di $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$.

3)

$$\langle b_1, \dots, b_m \rangle = \langle b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, \dots, b_1 + b_2 + \dots + b_m \rangle.$$

4) Una delle altre affermazioni è falsa.

1.7 In quale delle seguenti coppie di matrici la seconda non è ottenuta dalla prima con l'applicazione di operazioni elementari sulle righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$