UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prima prova di esonero - a.a. 2003-2004

1. (a) Si definiscano le nozioni di dimensione (finita) di uno spazio vettoriale reale e di sottospazio;

Sia ora V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e W un suo sottospazio.

(b) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di V e di W;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Sia k un numero reale. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} kx_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - kx_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, si calcolino esplicitamente le soluzioni, utilizzando esclusivamente operazioni elementari.

3. Sia k un numero reale e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;

(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

4. Siano k un numero reale, $v_k = (1, k, 0) \in \mathbb{R}^3$, $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale

$$U_k =< (2,0,1),\ (1,1,0),\ (3,1,k) > .$$

(a) Si determinino due basi di $(W+ < v_k >)$ e U_k;

(b) si determinino le dimensioni di $U_k + (W+ < v_k >)$ e di $U_k \cap (W+ < v_k >)$;

(c) si determinino (se esistono) i valori di k per i quali

$$U_k \oplus W = \mathbb{R}^3.$$

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e W un suo sottospazio non nullo di dimensione m.

(a) Si dimostri che esiste un sottospazio U di V tale che

$$U + W = V, \quad \dim U \cap W = 1;$$

(b) si determini per quali interi $s \geq 0$ esiste un sottospazio U_s di V tale che

$$U_s + W = V, \quad \dim U_s \cap W = s.$$