

Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE1 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Verra - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini

Esercitazioni del 14/10/2003

Data una matrice simmetrica ad essa rimangono associate una forma bilineare simmetrica b (che è rappresentata da quella matrice rispetto alla base canonica), e un operatore lineare T (anche esso rappresentato da quella matrice rispetto alla stessa base). Analisi, attraverso esempi, della relazione fra classi di congruenza di matrici relative a b e classi di similitudine di matrici relative a T

1.1 Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un operatore lineare simmetrico che opera nel modo seguente:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, 3x_1 - 2x_2 - x_3, -x_2 + x_3)$$

Trovare una base diagonalizzante per T . Che tipo di matrice invertibile è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base degli autovettori?

Considera ora la forma bilineare simmetrica associata alla matrice dell'operatore T rispetto alla base canonica. Trovare una base diagonalizzante per b .

1.2 Si determini la forma bilineare simmetrica:

$$b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

definita dalle seguenti condizioni :

$$b(e_1, e_1) = b(e_2, e_2) = b(e_3, e_3) = 1$$

inoltre ha come vettori isotropi i seguenti vettori:

$$e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3$$

Sia B la matrice di B rispetto alla base canonica: si verifichi che 2 è un autovalore di B e se ne calcoli l'autospazio. Si determini una base diagonalizzante di b .

1.3 $V = \mathbb{R}^4$, prodotto scalare ordinario.

Per quale valore reale di t il procedimento di Gram-Schmidt applicato ai seguenti vettori, produce almeno un vettore nullo:

$$v_1 = (0, 0, 1, 0) \quad v_2 = (1, 1, 1, 1) \quad v_3 = (2, 1, 0, 1) \quad v_4 = (t, 0, t, 0)$$

1.4 Sia data la matrice a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificare se è invertibile.

Calcolare la matrice

$$B = (A^t)A$$

Scrivere la forma bilineare simmetrica avente come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice B ;

Si verifichi se b è definita positiva o semidefinita positiva. A questo proposito che cosa potresti concludere subito se la matrice A fosse invertibile ?