

GE2 - Tutorato V - Lunedì 27 ottobre 2003 d.C.
tutori Federico Coglitore e Chiara Valenti

1. Sia X la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. $X^t X$ è diagonalizzabile?

2. Sia b la forma bilineare simmetrica definita su \mathbb{R}^3 , rispetto alla base canonica \mathbb{E} , dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
 - (a) Verificare in almeno due modi che b è definita positiva (cioè: b è un prodotto scalare).
 - (b) Determinare una base \mathbb{F} dello spazio vettoriale in cui b ha forma canonica.
 - (c) Calcolare $b((1, 1, 1), (2, 5, 3))$, dove le coordinate dei vettori sono espresse in base \mathbb{F}
 - (d) Sia T l'operatore lineare di \mathbb{R}^3 definito (rispetto ad \mathbb{E}) dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
 - (e) Scrivere la matrice di T rispetto alla base \mathbb{F} .
 - (f) T è un operatore unitario su \mathbb{R}^3 dotato del prodotto scalare b ?
 - (g) T è un operatore autoaggiunto su \mathbb{R}^3 dotato del prodotto scalare b ?

3. Sia T l'endomorfismo di \mathbb{R}^2 definito, rispetto alla base canonica \mathbb{E} di \mathbb{R}^2 spazio euclideo con prodotto scalare standard, dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Stabilire se T è autoaggiunto o unitario. Quindi dire se esiste un prodotto scalare in \mathbb{R}^2 in cui T è autoaggiunto o unitario.

4. In \mathbb{R}^3 considerare l'operatore lineare L , dato dalla proiezione ortogonale su $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } 2x + y - z = 0\}$. Determinare autovettori ed autovalori di L .

5. * Sia V lo spazio vettoriale di polinomi su \mathbb{R} con il prodotto scalare definito da $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Sia D l'operatore derivata su V . Cercare l'aggiunto di D .
(Suggerimento: siete sicuri che esiste?)