

Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica  
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004  
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: Dott.  
M. Nesci

Esercitazione del 12/05/2004

- 1.1 Per ognuna delle seguenti proprietà di separazione, costruire esempi di spazi topologici che le verificano:
- (i)  $T_1$  ma non  $T_2$ .
  - (ii)  $T_2$  ma non  $T_3$ .
  - (iii)  $T_3$  ma non  $T_4$ .
- 1.2 Sia  $(X, \mathcal{T})$ , sia  $S \subseteq X$ ,  $S$  chiuso. Sia  $(X|_{\rho_S}, \mathcal{T}_{\rho_S})$ , lo spazio quoziente che si ottiene considerando su  $X$  la relazione di equivalenza indotta dal sottinsieme  $S$ .  
Verificare che:
- (i) Se lo spazio  $X$  è  $T_1$  allora lo spazio quoziente è  $T_1$ .
  - (ii) Dal fatto che lo spazio  $X$  è  $T_2$  non segue che lo spazio quoziente è  $T_2$ .
  - (iii) Se  $X$  è  $T_3$  allora lo spazio quoziente è  $T_2$ .
  - (iv) Se  $X$  è  $T_4$  allora lo spazio quoziente è  $T_4$ .
- 1.3 Sia  $(X, \mathcal{T}_X)$  uno spazio topologico  $T_4$  e sia  $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ , un'identificazione chiusa, allora  $Y$  è  $T_4$ .
- 1.4 Sia  $(X, \mathcal{T}_d)$ , spazio topologico metrizzabile.
- (i) Verificare che ogni sottinsieme compatto di  $X$  è chiuso e limitato.
  - (ii) Verificare che la (i) non si inverte.