UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 3

Prima prova di esonero - a.a. 2003-2004

1. (a) Si definiscano le nozioni di spazio topologico e di applicazione continua tra due spazi topologici;

(b) Si enunci il risultato che dà altre due caratterizzazioni della continuità di applicazioni continue tra due spazi topologici;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Sia $\mathcal{S}$ la seguente famiglia di sottoinsiemi $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{S} = \{(n, n+1], \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

(a) Verificare se $\mathcal{S}$ può essere sottobase di qualche topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$. Se lo è determinare questa topologia;

(b) Confrontare la topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ con la topologia j_s (degli intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra).

(c) Determinare, $\forall x \in \mathbb{R}$ una base locale composta da un solo intorno della topologia $\mathcal{T}$.

3. Sia $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, sia $[0, 2\pi)$ con la topologia di sottospazio di $(\mathbb{R}, euclidea)$ e sia $f : [0, 2\pi) \to S^1$ l'applicazione che associa ad ogni $\alpha \in [0, 2\pi)$ il punto di S^1 il cui angolo con l'asse delle x è α.

(a) Per ogni coppia di punti $P, Q \in S^1$, siano $0 \leq \alpha_P, \alpha_Q < 2\pi$ gli angoli formati da OP, OQ con l'asse delle x e si ponga $d(P, Q) = |\alpha_P - \alpha_Q|$. Si dimostri che con tale distanza (S^1, d) è uno spazio metrico;

(b) Dotando S^1 della topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^2$, si dimostri che f è continua, biettiva ma non un omeomorfismo.

4. Sia D un disco di $(\mathbb{R}^3, euclidea)$ con la topologia di sottospazio e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ anch'esso con la topologia di sottospazio di $(\mathbb{R}, euclidea)$.

(a) Si dimostri che non esiste un'applicazione $f : D \to \mathbb{Z}$ che sia continua e suriettiva;

(b) Si dimostri che non esiste un'applicazione $f : D \to \mathbb{Z}$ che sia continua e non costante;

(c) Si dimostri che esiste un'applicazione $f : D \to \mathbb{R}$ che sia continua e suriettiva.

5. Sia X un insieme infinito dotato della topologia meno fine tra quelle tali che i sottoinsiemi $X - \{x\}$ sono aperti per ogni $x \in X$. Siano $Y \subset X$ un sottoinsieme infinito con la topologia di sottospazio e $f : Y \to Z$ un'applicazione continua in uno spazio topologico Z. Mostrare che:

(a) per ogni sottoinsieme U di X e per ogni ricoprimento aperto $U \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, c'è un insieme finito di aperti $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ che ricoprono ancora U;

(b) Sia $f(Y)$ con la topologia di sottospazio di Z. In $f(Y)$ non esiste un sottoinsieme non vuoto aperto e chiuso e diverso da $f(Y)$.