Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: M. Nesci

Tutorato del 9/3/2004

1. Trovare una base numerabile per la topologia euclidea su $\mathbb{R}$.

2. Dimostrare che la topologia banale su un insieme con almeno due elementi non è metrizzabile.

3. Verificare se i seguenti insiemi sono topologie e, in caso contrario, verificare se sono delle basi.

   (a) $\{U \subseteq X \ / \ U$ è un insieme finito$\}$.
   (b) $\{U \subseteq X \ / \ X \setminus U$ è un insieme finito$\} \cup \{\emptyset\}$.
   (c) $\{U \subseteq X \ / \ X \setminus U$ è un insieme contabile$\} \cup \{\emptyset\}$ (ricordiamo che un insieme si dice contabile se ha cardinalità al più numerabile).
   (d) $\{X\}$.
   (e) $\{[m,n] \subseteq \mathbb{R} \ / \ m,n \in \mathbb{Z}\}$.
   (f) $\{(m,n) \subseteq \mathbb{R} \ / \ m,n \in \mathbb{Z}\}$.
   (g) $\{(-\infty, a) \subseteq \mathbb{R} \ / \ a \in \mathbb{R}\}$.
   (h) $\{[a,b) \subseteq \mathbb{R} \ / \ a,b \in \mathbb{R}\}$.
   (i) $\{A \subseteq X \ / \ A \subseteq \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{T}_e\} \cup \{X\}$. Dove $X := \mathbb{R} \cup \{a\}$.

4. Dimostrare che la topologia cofinita data su un'insieme X è metrizzabile se e solo se X è finito.

5. Sia X un insieme. Dimostrare che:

   (a) Se $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sono topologie su X, allora $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ è una topologia.
   (b) Se $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ è una famiglia di topologie su X, allora $\bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ è una topologia.
   (c) Sia $\mathcal{F}$ una famiglia qualsiasi di sottoinsiemi di X. Dimostrare che l'insieme delle topologie che contengono $\mathcal{F}$, ordinate rispetto all'inclusione, ammette un elemento minimo $\mathcal{T}(\mathcal{F})$.
   (d) Applicare il punto precedente alla famiglia (e) dell'esercizio 3. Dire quali sono gli aperti della topologia risultante.