Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini -
Tutore: Dott. M. Nesci

Tutorato n.6 del 20/4/2004

1. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici, sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti di X e sia a un suo limite. Dimostrare che, in Y, $f(a)$ è un limite della successione $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Utilizzare l'esercizio precedente per dimostrare il punto (a) dell'ultimo tutorato.

3. Scrivere la topologia definita nell'esercizio 2. dell'ultimo tutorato come prodotto di due topologie su $\mathbb{R}$.

4. Sia $X = \mathbb{R}^2$; con la topologia $\mathcal{T}_1$ data da:

$$\mathcal{T}_1 := \{X, \emptyset\} \cup \left\{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > a, y < b\} \ / \ a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

   (a) $\mathcal{T}_1$ è ottenuta come topologia prodotto di due topologie su $\mathbb{R}$. Quali?
   (b) Sia data la famiglia di insiemi $\mathcal{T}_2 := \left\{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x < a, y > b\} \ / \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$;
      i. dimostrare che $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ è una base
      ii. qual è la topologia risultante?

5. Sia X uno spazio topologico; dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.

   (a) i. La chiusura di ogni aperto $U \neq \emptyset$ è tutto X.
      ii. L'intersezione di due aperti qualunque, purché non vuoti, è non vuota.
      iii. Se C_1, C_2 sono due chiusi tali che $C_1 \cup C_2 = X$, allora $C_1 = X$ oppure $C_2 = X$.
   (b) Verificare quali delle seguenti topologie su $\mathbb{R}$ hanno queste proprietà: discreta, banale, euclidea, cofinita, i_s, j_d.