Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: Dott. M. Nesci

Tutorato n.7 del 27/4/2004

1. Sia I l'intervallo $[0,1]$ visto come sottospazio di $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea; sa data la relazione d'equivalenza su I
$$x\rho y :\Leftrightarrow x = y \vee x, y \in \{0,1\}$$
e sia X lo spazio topologico quoziente $\frac{I}{\rho}$. Dimostrare che $X \cong S^1$.

2. Sia $Q := I \times I \subset \mathbb{R}^2$; sia data su Q la relazione d'equivalenza
$$(x,y)\rho(x',y') :\Leftrightarrow \begin{array}{l} (x,y) = (x',y') \\ x, x' \in \{0,1\} \wedge y = y' \\ y, y' \in \{0,1\} \wedge x = x' \end{array}.$$
Dimostrare che lo spazio quoziente $X = \frac{Q}{\rho}$ è omeomorfo a $S^1 \times S^1$.

3. Sia $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 0 \vee y = 1\}$. Sia data la relazione di equivalenza ρ su A che mette in relazione i punti con uguale ascissa, tranne quelli di ascissa 0 che sono i relazione solo con sé stessi.

   Sia X lo spazio topologico quoziente $\frac{A}{\rho}$. Dimostrare che:
   (a) Per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno di x omeomorfo a $\mathbb{R}$.
   (b) X non è omeomorfo a $\mathbb{R}$.
   (c) X ha una base numerabile.
   (d) X non è T2.

4. Definiamo lo spazio proiettivo n-dimensionale come il quoziente
$$\mathbb{P}^n := \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}}{\sim}.$$
Dove $\sim$ è la relazione d'equivalenza definita da
$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} :\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \ / \ \mathbf{x} = t\mathbf{y}.$$
Per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$ chiamiamo $H_i := \{[\mathbf{x}] \ / \ x_i = 0\}$ e $U_i := \mathbb{P}^n \setminus H_i$. Dimostrare che:
   (a) U_i è aperto e denso per ogni i.
   (b) $U_i \cong \mathbb{R}^n$ per ogni i.
   (c) $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}$ per ogni i.