AC1 – Tutorato 11

Paolo Tranquilli

Venerdì 27 Maggio

1. Trovare, se esiste, o eventualmente mostrare che non esiste una mappa conforme f tra le seguenti regioni:
   (a) $D - \{\, |z - 1/2| \leq 1/2 \,\}$ in D. (*sugerimento*: passare per una striscia.)
   (b) $D - \{\, |z - 1/4| \leq 1/4 \,\}$ in $D - D'$ dove D' è un cerchio di centro 0 e raggio $r < 1$. (*suggerimento*: sfruttare la preservazione della simmetria.)
   (c) $D - \{\, |z + 1 + i| \leq 1 \,\}$ in $\{\, 0 < \operatorname{Im} z < 1 \,\}$. (*suggerimento*: concludere con un logaritmo.)
2. Si dice che $\prod u_n$ con $u_n \neq 0$ converge assolutamente se:
   - $u_n \to 1$ per $n \to +\infty$;
   - $\sum \log u_n$ converge assolutamente. Per un numero finito di n scegliamo una determinazione qualunque del logaritmo. Definitivamente però ho $u_n = 1 - a_n$ con $|a_n| < 1$, per cui scegliamo la classica determinazione $\log(1 - a_n) = -a_n - a_n^2/2 - a_n^3/3 - \ldots$

   $\prod u_n$ converge a $e^{\sum \log u_n}$, valore indipendente dalle determinazioni scelte per i primi n. Mostrare che $\prod(1 - a_n)$ converge assolutamente se e solo se $\sum a_n$ converge assolutamente.
3. Mostrare che
$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$
4. Mostrare che la funzione
$$\theta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + h^{2n-1} e^{z})(1 + h^{2n-1} e^{-z})$$
   è una funzione intera e soddisfa l'equazione funzionale
$$\theta(z + 2 \log h) = h^{-1} e^{-z} \theta(z).$$
5. Dire se $\prod_{n>0} e^{1/n}$ e $\prod_{n>0} e^{1/n^2}$ convergono assolutamente, e in caso affermativo calcolarne il limite.
6. Mostrare che se z_n è tale che definitivamente $|z_n/n| > n^{\alpha}$ con $\alpha > 0$ allora
$$\prod \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$
   converge assolutamente per ogni z. Dare una condizione necessaria e sufficiente su z_n.
7. Trovare l'insieme di convergenza assoluta di
$$\prod \left(1 + \frac{e^{-kz}}{k^2}\right).$$