AM5: Tracce delle lezioni- IX Settimana

DISEGUAGLIANZA DI YOUNG

Siano $p, q, r \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$. Allora

$$|\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,(g * h)(x)dx| = |\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(x)\, g(x-y)\, h(y)\, dxdy| \leq \|f\|_p\, \|g\|_q\, \|h\|_r$$

$\forall f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbf{R}^n)$, $h \in L^r(\mathbf{R}^n)$.

Prova. Se p', q', r' sono gli esponenti coniugati, allora

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{p'}, \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} = 1$$

Dalla diseguaglianza di Holder generalizzata e quindi Fubini

$$|\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(x)g(x-y)h(y)dxdy| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(x)|^{\frac{p}{r'}} \times |f(x)|^{\frac{p}{q'}} \times |g(x-y)|^{\frac{q}{p'}} \times |g(x-y)|^{\frac{q}{r'}} \times |h(y)|^{\frac{r}{p'}} \times |h(y)|^{\frac{r}{q'}} dxdy \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(x)|^p |g(x-y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{r'}} \times \left(\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(x)|^p |h(y)|^r dxdy\right)^{\frac{1}{q'}} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |h(y)|^r |g(x-y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$\|f\|_p^{\frac{p}{r'}}\ \|g\|_q^{\frac{q}{r'}}\ \|f\|_p^{\frac{p}{q'}}\ \|h\|_r^{\frac{r}{q'}}\ \|h\|_r^{\frac{r}{p'}}\ \|g\|_q^{\frac{q}{p'}} = \|f\|_p\ \|g\|_q\ \|h\|_r$$

NOTA. La condizione $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$ é necessaria, in quanto la diseguaglianza deve essere invariante rispetto al cambio di scala $x' = tx, y' = ty$: il primo membro cambia per un fattore t^{-2n}, mentre il secondo cambia per un fattore $t^{-n(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})}$.

Corollario 1 Siano $q, r \geq 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$, $\frac{1}{s} := \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$. Allora

$$g \in L^q(\mathbf{R}^n), \quad h \in L^r(\mathbf{R}^n) \quad \Rightarrow \quad \|h * g\|_s \leq \|g\|_q\ \|h\|_r$$

Il caso limite: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ Siano $q, r \geq 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Allora

$$g \in L^q(\mathbf{R}^n), \quad h \in L^r(\mathbf{R}^n) \quad \Rightarrow \quad h * g \in C(\mathbf{R}^n) \quad \text{e} \quad \sup_{|x| \geq R} |h * g|(x) \to_{R \to +\infty} 0$$

Intanto, $\int |g(x-y)|\,|h(y)|dy \leq \|g\|_q\,\|h\|_r \quad \forall x$ e quindi $(g * h)(x)$ é ben definita per ogni $x \in \mathbf{R}^n$.

Siano poi $g_\epsilon, h_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ tali che $\|g-g_\epsilon\|_q + \|h_\epsilon - h\|_r \le \epsilon$. Da Holder

$$|(g*h)(x) - (g_\epsilon * h_\epsilon)(x)| \le |[(g-g_\epsilon)*h](x)| + |[g_\epsilon * (h-h_\epsilon)](x)| \le$$
$$\le \|g-g_\epsilon\|_q \, \|h\|_r + \|h-h_\epsilon\|_r \, \|g_\epsilon\|_q \le 2\epsilon(\|g\|_q + \|h\|_r)$$

Dunque $g_\epsilon * h_\epsilon \to_{\epsilon\to 0} g*h$, uniformemente e siccome $g_\epsilon * h_\epsilon$ é chiaramente C_0^∞, allora $g*h$ é continua. Infine, che $g*h$ vada uniformemente a zero all'infinito segue di nuovo dal fatto che $g*h$ é limite uniforme di funzioni a supporto compatto.

Effetto regolarizzante della convoluzione. Sia $\int_{\mathbf{R}^n} |f| < \infty$. Allora

(i) $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \Rightarrow f*g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\frac{\partial}{\partial x_j}(f*g) = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}$

(ii) $\mathrm{supp}(f*g) \subset \mathrm{supp}\ f + \ \mathrm{supp}\ g$ $\quad (\mathrm{supp}\ f := \text{chiusura di } \{x:\ f(x) \neq 0\})$

Basta mostrare, usando Lebesgue, che é lecita la derivazione sotto segno di integrale.

Nuclei regolarizzanti. Sia $0 \le \varphi$ sommabile in $\mathbf{R}^n$ tale che $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi = 1$. Sia $\varphi_\epsilon(x) ::= \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Allora

$$\int |\varphi_\epsilon * f - f|^p \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^n)$$

Segue da $\int_{\mathbf{R}^n} |\varphi_\epsilon * f - f|^p(x)\,dx = \int |\int [f(x) - f(x-y)](\varphi_\epsilon(y))^{\frac{1}{p}} (\varphi_\epsilon(y))^{\frac{1}{q}}\,dy|^p\,dx$

$$\le \int \left(\int |f(x)-f(x-y)|^p \varphi_\epsilon(y)dy\right)\left(\int |\varphi_\epsilon(y)|dy\right)dx =$$

$$\int \left(\varphi(z)\int |f(x) - f(x-\epsilon z)|^p dx\right) dz \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \text{(convergenza dominata)}$$

Approssimazione mediante convoluzione. Siccome $f * \varphi_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, abbiamo ottenuto che

ogni f sommabile é limite in media di funzioni C^∞
In effetti ogni f sommabile é limite in media di funzioni C_0^∞

Basta infatti prendere $f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} * \varphi_\epsilon$:

$$\int |f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} * \varphi_\epsilon - f| \le \int |(f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} - f) * \varphi_\epsilon| + \int |f * \varphi_\epsilon - f| \to 0$$

perché $\int |f - f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}}| = \int_{|x|\ge\frac{1}{\epsilon}} |f| \to 0$ al tendere di ϵ a zero.

DISEGUAGLIANZA HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV

Siano $\quad 0 < \lambda < N, \quad p, r > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{N} + \frac{1}{r} = 2.$ Esiste $c = c(\lambda, N, p)$:

$$|\int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \frac{h(x)\ f(y)}{|x-y|^\lambda} dxdy| \quad \leq \quad c \ \ \|f\|_p \ \|h\|_r \qquad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^N), \quad h \in L^r(\mathbf{R}^N)$$

NOTA. La relazione sopra indicata tra i parametri λ, p, r, N é necessaria perché una siffatta diseguaglianza possa valere, e ció per il suo carattere di invarianza rispetto ai cambi di scala.

Sia $\quad G_\lambda(x) := \frac{1}{\|x\|^\lambda}$, e siano $\quad p, s > 1, \quad \frac{1}{s} = \frac{\lambda}{N} + \frac{1}{p} - 1.$ La diseguaglianza (HLS) si puó riformulare cosí:

$$\exists c > 0 : \|G_\lambda * f\|_s \leq c\|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^N)$$

Alla dimostrazione premettiamo alcune notazioni ed utili formule. Data $f \geq 0$ misurabile in $\mathbf{R}^N$, sia

$$\chi_f := \chi_{\Gamma_f}, \quad \Gamma_f := \{(x,t) \in \mathbf{R}^N \times [0, +\infty] : \quad 0 \leq t < f(x)\}$$

la funzione caratteristica del sottografico di f. Chiaramente Γ_f e quindi χ_f sono misurabili e

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \chi_f(x,t)dt \quad \forall x \in \mathbf{R}^N, \quad \int_{\mathbf{R}^N} f = \int_0^{+\infty} |(f > t)|dt$$

ove abbiamo indicato con $|(f > t)|$ la misura dell'insieme $(f > t) := \{x \in \mathbf{R}^N : f(x) > t\}$ (la seconda uguaglianza deriva da Fubini). Mediante il cambio di variabile $s = t^{\frac{1}{p}}$, otteniamo anche

$$f^p(x) = p \int_0^{+\infty} \chi_f(x,s) s^{p-1} ds, \quad \int_{\mathbf{R}^N} f^p = p \int_0^{+\infty} |(f > s)| s^{p-1} ds$$

Infine, effettuando il cambio di variabile $s = \frac{1}{t^{\frac{1}{\lambda}}}$, vediamo che

$$\frac{1}{\|x\|^\lambda} = \int_0^{\frac{1}{\|x\|^\lambda}} dt = \lambda \int_{\|x\|}^{+\infty} s^{-\lambda-1} ds = \lambda \int_0^{+\infty} \chi_{\{\|x\| < s\}} s^{-\lambda-1} ds \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$$

Prova di (HLS). Dividendo per $\|f\|_p \ \|h\|_r$, (HLS) si riscrive

$$c(N,\lambda,p) \ := \ \sup\{\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \frac{h(x)\ f(y)}{|x-y|^\lambda}\,dx\,dy : \quad f,h\geq 0, \|f\|_p = 1 = \|h\|_r\} < +\infty$$

Si tratta cioé di provare che esiste $c = c(N,\lambda,p) > 0$ tale che

$$p\int_0^{+\infty} |(f>t)|t^{p-1}ds = \int_{\mathbf{R}^N} f^p = 1 = \int_{\mathbf{R}^N} h^r = r\int_0^{+\infty} |(h>s)|s^{r-1}ds \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \left[\left(\int_0^{+\infty} \chi_f(x,t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} \chi_h(y,s)ds\right)\left(\int_0^{+\infty} \chi_{\{\|x-y\|<\tau\}}\tau^{-\lambda-1}d\tau\right)\right]dx\,dy \leq c$$

ovvero, usando Fubini $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}}dtdsd\tau \leq c$

ove si é posto

$$I(t,s,\tau) := \int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \chi_f(x,t)\ \chi_h(y,s)\ \chi_{\{\|x-y\|<\tau\}}\,dx\,dy$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} I \ &\leq \ |(f>t)|\ |(h>s)| \\ I \ &\leq \ volB_\tau\,|(f>t)| \ = \ c_N\ \tau^N|(f>t)| \\ I \ &\leq \ volB_\tau\,|(h>s)| = c_N\ \tau^N\,|(h>s)| \end{aligned}$$

e quindi

$$I \leq \frac{c_N\,\tau^N\,|(f>t)|\ |(h>s)|}{\max\{c_N\,\tau^N,\ |(f>t)|,\ |(h>s)|\}}$$

Sostituendo τ con $c_N^{\frac{1}{N}}\ \tau$, otteniamo

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}}\,dt\,ds\,d\tau \ \leq$$

$$\leq \ c_N^{\frac{1}{N}} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\tau^{\lambda+1}}\frac{\tau^N\,|(f>t)|\ |(h>s)|}{\max\{\ \tau^N,\ |(f>t)|,\ |(h>s)|\}}\,d\tau\right)\ ds\,dt$$

Passo 1 Per ogni s,t si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}}\,d\tau \ \leq \ \frac{N\,c_N^{\frac{1}{N}}}{\lambda(N-\lambda)}\ \min\{|(h>s)|\ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}},\ |(f>t)|\ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\}$$

Infatti, se $\quad |(h>s)| \le |(f>t)|, \quad$ allora

$$\frac{\tau^N\,|(f>t)|\;|(h>s)|}{\max\{\,\tau^N,\;|(f>t)|,\;|(h>s)|\}} \le \frac{\tau^N\,|(f>t)|\;|(h>s)|}{\max\{\tau^N,\;|(f>t)|\}}$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty}\frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}}d\tau \le c_N^{\frac{1}{N}}\left[\int_0^{|(f>t)|^{\frac{1}{N}}}\frac{\tau^N\;|(h>s)|}{\tau^{\lambda+1}}\,d\tau\;+\;\int_{|(f>t)|^{\frac{1}{N}}}^{\infty}\frac{|(f>t)|\;|(h>s)|}{\tau^{\lambda+1}}\,d\tau\right]$$

$$=\frac{c_N^{\frac{1}{N}}}{N-\lambda}\,|(h>s)|\;|(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}+\frac{c_N^{\frac{1}{N}}}{\lambda}\,|(h>s)|\;|(f>t)|^{1-\frac{\lambda}{N}}=$$

$$=\frac{Nc_N^{\frac{1}{N}}}{\lambda(N-\lambda)}|(h>s)|\;|(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\;\le\;\frac{Nc_N^{\frac{1}{N}}}{\lambda(N-\lambda)}|(f>t)|\;|(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}$$

Scambiando h ed f, si ottiene

$$|(h>s)| \ge |(f>t)| \quad\Rightarrow\quad \int_0^{+\infty}\frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}}d\tau \le \frac{Nc_N^{\frac{1}{N}}}{\lambda(N-\lambda)}|(f>t)|\,|(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \le$$

$$\le\;\frac{Nc_N^{\frac{1}{N}}}{\lambda(N-\lambda)}\;|(h>s)|\;|(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}$$

Dal Passo 1 otteniamo

$$\forall S>0: \qquad \frac{\lambda(N-\lambda)}{Nc_N^{\frac{1}{N}}}\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N}\frac{h(x)\;f(y)}{|x-y|^\lambda}dxdy \le$$

$$\le\int_0^\infty\left(|(h>s)|\int_0^S\;|(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\,dt\right)ds+\int_0^\infty\left(\;|(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\int_S^\infty|(f>t)|\,dt\right)ds$$

Ora,

$$\int_0^S\;|(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\,dt=\int_0^S\;|(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}t^{(p-1)\frac{N-\lambda}{N}}\;t^{-(p-1)\frac{N-\lambda}{N}}\,dt\;\le$$

$$\le\;\left(\int_0^\infty|(f>t)|t^{p-1}\,dt\right)^{\frac{N-\lambda}{N}}\;\left(\int_0^S t^{-(p-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}}\,dt\right)^{\frac{\lambda}{N}}\;=$$

$$=\;\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{N-\lambda}{N}}\;\frac{S^{[1-(p-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}]}}{1-(p-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}}^{\frac{\lambda}{N}}\;=\;c(\lambda,N,p)S^{(r-1)\frac{p}{r}}$$

perché $\quad \frac{1}{p}+\frac{\lambda}{N}+\frac{1}{r}=2 \quad \Rightarrow$

$$\frac{\lambda}{N}-(p-1)\frac{N-\lambda}{N}=1-p+\frac{p\lambda}{N}=2p-1-\frac{p}{r}+1-p=(r-1)\,\frac{p}{r}$$

Dunque, prendendo $\quad S=s^{\frac{r}{p}}, \quad$ vediamo che

$$p\int_0^{+\infty}|(f>t)|t^{p-1}ds=1=r\int_0^{+\infty}|(h>s)|s^{r-1}ds \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty}\left(|(h>s)|\int_0^{s^{\frac{r}{p}}}\ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\ dt\right)\ ds\ \leq$$

$$\leq\ c(N,\lambda,p)\ \int_0^{\infty}\ |(h>s)|\ \ s^{r-1}\ ds\ =\ \frac{c(N,\lambda,p)}{r}$$

Analoga limitazione per il secondo integrale: usando Fubini e poi Holder,

$$\int_0^{\infty}\Big(\ \ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\int_{s^{\frac{r}{p}}}^{\infty}|(f>t)|\,dt\Big)\,ds=\int_0^{\infty}\left(\ \ |(f>t)|\int_0^{t^{\frac{p}{r}}}\ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\ ds\right)dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\ \ |(f>t)|\int_0^{t^{\frac{p}{r}}}\ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}s^{(r-1)\frac{N-\lambda}{N}}\ s^{-(r-1)\frac{N-\lambda}{N}}\ ds\right)\ dt\leq$$

$$\leq\int_0^{\infty}\ \ |(f>t)|\left(\int_0^{\infty}|(h>s)|s^{r-1}\,ds\right)^{\frac{N-\lambda}{N}}\ \ \left(\int_0^{t^{\frac{p}{r}}}\ s^{-(r-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}}\ ds\right)^{\frac{\lambda}{N}}\ dt\ =$$

$$c(\lambda,N,p,r)\ \int_0^{\infty}\ \ |(f>t)|\ \ t^{[\frac{\lambda}{N}-(r-1)\frac{N-\lambda}{N}]\frac{p}{r}}\,dt\ =$$

$$=\ c(\lambda,N,p,r)\ \int_0^{\infty}\ \ |(f>t)|\ \ t^{p-1}\,dt$$

DUE CASI IMPORTANTI.

$\lambda=N-2, \quad p=\frac{2N}{N+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s}=\frac{N-2}{2N}. \quad$ Dunque

$$\|G_{N-2}*f\|_{\frac{2N}{N-2}}\quad\leq\quad c(N)\quad\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\qquad\qquad \forall f\in L^{\frac{2N}{N+2}}(\mathbf{R}^N)$$

Se $\lambda=N-1,\ N>\ p\ >\ 1, \quad \frac{1}{s}=\frac{N-p}{Np}. \quad$ Dunque

$$\|G_{N-1}*f\|_{\frac{Np}{N-p}}\quad\leq\quad c(N,p)\quad\|f\|_p\qquad\qquad \forall f\in L^p(\mathbf{R}^N)$$

AM5: Esercizi e Problemi- IX Settimana

Problema 1. Sia $0 \le \varphi$ sommabile in $\mathbf{R}^n$ tale che $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi = 1$. Sia $\varphi_\epsilon(x) ::= \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Allora

$$\int_{B_R} |\varphi_\epsilon * f - f|^p \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \forall f \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^n), \quad \forall R > 0$$

ove $f \in L^p_{loc} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{|x|\le R} |f|^p < +\infty \quad \forall R > 0$.

Problema 2. Sia f continua in $\mathbf{R}^n$, $\varphi \in C_0^\infty$. Provare che

(i) $f * \varphi(x) : \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy$ é definita in tutto $\mathbf{R}^n$ ed é una funzione C^∞.

(ii) $f * \varphi_\epsilon$ converge uniformemente sui compatti ad f.

Problema 3 Sia $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile. Provare che $(x, y) :\to f(x-y)$ é Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Scrivere, per $f \ge 0$, $f(x) = \sum_j \frac{1}{j}\chi_{A_j}, f(x-y) = ...$ *ed usare l'esercizio precedente (nota che* $\chi_A(x-y) = \chi_{\{(x,y):\ x-y\in A\}}$*).*

Esercizio 1. Stabilire se é vero che $\int_{\mathbf{R}^n} |f| < \infty \Rightarrow f * f$ é continua.

Suggerimento. Considerare $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\chi_{[-1,1]}$

Esercizio 2. Stabilire se é vero che

$$f \in C(\mathbf{R}^n),\ \varphi \in C_0^\infty \Rightarrow x \to \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\, g(y)dy \ \text{ é sommabile}$$

Esercizio 3. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Posto $f_n = f\,\chi_{\{|f(x)|\le n\}}$, provare che

$$\int |g| < +\infty \Rightarrow \int |f_n * g - f * g| \to_n 0$$

Esercizio 4 . Siano $\varphi, f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Provare che

$$\exists c > 0 : \quad |\varphi(x)| \le c \ \forall x \in \mathbf{R}^n \Rightarrow \varphi \star f \ \text{ é continua}$$

Provare con un esempio che l'ipotesi di limitatezza é essenziale.

Suggerimento . Considerare $\varphi(x) = f(x) = |x|^{-\frac{2}{3}}\chi_{[0,1]}$.