

Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE1 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini -
Tutori: A. Agnesse, N. Maroni

Esercitazione del 6/4/2005

Somma e intersezione di sottospazi vettoriali.
Somme dirette.
Formula di Grasmann vettoriale.

- 1 Sia $V = \mathbb{R}^4$, spazio vettoriale su \mathbb{R} .
Siano U e W i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \langle (1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1) \rangle$$

$$W = \langle (1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3) \rangle$$

Determinare

- (a) $\dim(U + W)$
(b) $\dim(U \cap W)$.

- 2 Siano W e U i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4

$$U = \{(x, y, z, w); y + z + w = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, w); x + y = 0, z = 2w\}$$

Trovare una base e la dimensione di :

- (1) U
(2) W
(3) $W + U$ e $U \cap W$.

- 3 Siano W e U i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3

$$U = \{(x, y, z); x - y = 0, y - z = 0\}$$

$$W = \{(0, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}$$

Dimostrare che la loro somma e' diretta e che i due sottospazi sono supplementari.

- 4 Sia $V = \mathbb{R}^5$, spazio vettoriale su \mathbb{R} .
Siano U e W i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \langle (1, 3, -2, 2, 3), (1, 4, -3, 4, 2), (2, 3, -1, -2, 9) \rangle$$

$$W = \langle (1, 3, 0, 2, 1), (1, 5, -6, 6, 3), (2, 5, 3, 2, 1) \rangle$$

Determinare una base e la dimensione di

- (a) $U + W$
(b) $U \cap W$.

5 Sia k un numero reale. Siano W e U_k i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4

$$U_k = \langle (4, 4, 2, 4), (2, 2, 0, 2), (6, 6, 2, k) \rangle$$

$$W = \langle (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0) \rangle$$

Determinare :

- (1) una base di W e di U_k
- (2) $\dim(W + U_k)$, $\dim(W \cap U_k)$
- (3) Esistono valori reali di k per i quali la somma dei due sottospazi e' diretta ? Se si quali sono.