AM2 2005-2006: II ESONERO

TEMA 1. Provare la seguente proprietá

$$F \subset \mathbf{R}^n \quad \text{é chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad (u_k \in F,\ u_k \to_k u \quad \Rightarrow \quad u \in F)$$

TEMA 2. Provare il Teorema di Heine-Cantor:

$$f \in C(K), \quad K \subset \mathbf{R}^n \quad \text{compatto} \quad \Rightarrow \quad f \quad \text{é uniformemente continua in } K.$$

TEMA 3 Sia $f \in C^1(O)$, $O \subset \mathbf{R}^N$ aperto convesso. Provare che

$$|f(u) - f(v)| \leq ||u - v|| \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Dedurre che se $f \in C^1(O)$, O aperto connesso per archi, allora

$$\nabla f(u) = 0 \quad \forall u \in O \quad \Rightarrow \quad f \equiv \text{cost.} \quad \text{in} \quad O$$

TEMA 4 Sia $f \in C^2(D_r(u))$ tale che $\nabla f(u) = 0$. Provare che:

$$< H_f(u)\, h, h > \; > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \exists r > 0 : \quad f(u) \leq f(v) \qquad \forall v \in D_r(u)$$

TEMA 5 Dimostrare il Teorema di Fubini: se $f \in C([a,b] \times [c,d])$, allora

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dx\ dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) dy \right] dx$$

ESERCIZIO 1 Sia

$$f(x,y) \; = \; y^{\frac{1}{3}} \; \frac{\sin x^3 \; \sin y}{x^8 + y^2} \quad \text{se} \quad x^2 + y^2 \; \neq \; 0, \quad f(0,0) \; = \; 0$$

(i) Stabilire se f é continua in $(0,0)$

(ii) Stabilire se f é differenziabile in $(0,0)$

ESERCIZIO 2 Sia $g(x,y) \; := \; y^4(2y^2 - 1) - 4x(y^4 - x), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$

(i) Calcolare $\inf\limits_{\mathbf{R}^2} g$ $\sup\limits_{\mathbf{R}^2} g$

(ii) Determinare massimi o minimi (locali) di g (se esistono)

(iii) Calcolare $\inf\limits_{\{g=0\}} x$ e stabilire se si tratta di un minimo

ESERCIZIO 3 Calcolare, usando il teorema di Fubini,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}$$

ESERCIZIO 3 Calcolare il seguente integrale doppio

$\int\limits_D (x \cos y) \, dxdy$ con $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x^2\}$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. f non é differenziabile in $(0,0)$:

osserviamo intanto che, siccome f ha derivate parziali nulle in $(0,0)$, la differenziabilitá di f in zero equivale a $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$, ed invece, se $\epsilon_n > 0, \epsilon_n \to_n 0$, allora

$$\frac{f(\epsilon_n,\epsilon_n^4)}{\sqrt{\epsilon_n^2+\epsilon_n^8}} = \frac{\epsilon_n^{\frac{4}{3}} \ (\sin\epsilon_n^3) \ (\sin\epsilon_n^4)}{2\epsilon_n^8 \ \sqrt{\epsilon_n^2+\epsilon_n^8}} = \frac{1}{2\epsilon^{\frac{2}{3}} \ \sqrt{1+\epsilon_n^6}} \quad \frac{(\sin\epsilon_n^3)}{\epsilon_n^3} \frac{(\sin\epsilon_n^4)}{\epsilon_n^4} \to_n +\infty$$

Peró f é continua in $(0,0)$:

$$\left| y^{\frac{1}{3}} \ \frac{\sin y \ \ \sin x^3}{(x^8+y^2)} \right| \le \frac{(x^8+y^2)^{\frac{3}{8}} \ (x^8+y^2)^{\frac{2}{3}}}{(x^8+y^2)} = (x^8+y^2)^{\frac{1}{24}} \quad \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

ESERCIZIO 2.

(i) g non é né inferiormente né superiormente limitata:

$$g(0,y) = 2y^6 - y^4 \to_{|y|\to+\infty} +\infty \quad \Rightarrow \quad \sup_{\mathbf{R}^2} \ g = +\infty$$

$$g(y^3,y) = 6y^6 - y^4 - 4y^7 \to_{y\to+\infty} -\infty \quad \Rightarrow \quad \inf_{\mathbf{R}^2} \ g = -\infty$$

(ii) I punti critici di g, soluzioni di

$$g_y := 12y^5 - 4y^3(1+4x) = 0, \qquad g_x := 8x - 4y^4 = 0$$

sono $(0,0)$, $(\frac{1}{2},\pm 1)$, $(\frac{1}{8},\frac{\pm\sqrt{2}}{2})$, e si ha $g(0,0) = g(\frac{1}{2},\pm 1) = 0$, $g(\frac{1}{8},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{12}$.
Poi
$g_{yy}(x,y) = 60y^4 - 12y^2(1+4x) \Rightarrow g_{yy}(0,0) = 0 \ \ g_{yy}(\frac{1}{2},\pm 1) = 24 \ \ g_{yy}(\frac{1}{8},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = 6$
$g_{xy}(x,y) = -16y^3 \Rightarrow g_{xy}(0,0) = 0 \ \ g_{xy}(\frac{1}{2},\pm 1) = \mp 16 \ \ g_{xy}(\frac{1}{8},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = \mp 4\sqrt{2}$
$g_{xx} \equiv 8$. Siccome, se $H_g(x,y)$ é la matrice Hessiana di g in (x,y), risulta

$$\det H_g(0,0) = 0, \qquad \det H_g(\frac{1}{2},\pm 1) < 0, \qquad \det H_g(\frac{1}{8},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$$

e quindi $H_g(0,0)$ é semidefinita positiva, $H_g(\frac{1}{2},\pm 1)$ ha due autovalori di segno opposto, $H_g(\frac{1}{8},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ é definita positiva, concludiamo che

$(\frac{1}{2}, \pm 1)$ é un punto di sella, $(\frac{1}{8}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ é punto di minimo.

Infine $(0,0)$ non é né di massimo né di minimo, perché é di massimo per $y \to g(0,y) = 2y^6 - y^4$ e di minimo per $x \to g(x,0) = 4x^2$.

(iii) $4x^2 + 2y^6 = y^4(1+4x) \Rightarrow x \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow \inf_{\{g=0\}} x \geq -\frac{1}{4}$. Siccome poi $g(x_n, y_n) = 0,\ x_n \to \inf_{\{g=0\}} x$, (cioé (x_n, y_n) successione minimizzante) $\Rightarrow y_n$ é limitata e quindi (eventualmente passando a una sottosuccessione) convergente, concludiamo che $\inf_{\{g=0\}} x$ é realizzato, cioé é il minimo di x su $\{g=0\}$. Il punto di minimo si deve trovare tra i punti singolari di $\{g=0\}$, ovvero $(0,0)$ e $(\frac{1}{2}, \pm 1)$ e le soluzioni del sistema di Lagrange

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \qquad g = 0 \qquad (f(x,y) := x) \qquad \text{ovvero}$$

$$0 = 12y^5 - 4y^3(1+4x), \qquad 1 = \lambda(8x - 4y^4), \qquad 4x^2 + 2y^6 - y^4(1+4x) = 0$$

Ma $3y^2 = 1 + 4x$, $g = 0 \Rightarrow 4x^2 + 2y^6 = 3y^6 \Rightarrow 4x^2 = y^6 \Rightarrow (3y^2-1)^2 = 4y^6$. Posto $t = y^2$, l'equazione si riscrive $4t^3 - 9t^2 + 6t - 1 = 0$, che ha $t = 1$ come radice doppia ($t = 1$ é anche zero della derivata). Notiamo che le corrispondenti soluzioni $y = \pm 1, x = \frac{1}{8}$ non sono peró soluzioni del sistema: l'equazione in λ non puó essere soddisfatta prché $(\frac{1}{8}, \pm 1)$ é critico per g ma non per f.

Si trova poi subito la terza radice $t = \frac{1}{4}$, cui corrispondono le soluzioni del sistema $(\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{2}), (-\frac{1}{16}, \pm\frac{1}{2})$.

Dunque $-\frac{1}{16}$ é il minimo valore di x su $g(x,y) = 0$:

$$g(-\frac{1}{16}, \pm\frac{1}{2}) = 0, \qquad g(x,y) = 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{16}$$

Notiamo che a tale risultato si puó pervenire piú facilmente, riconoscendo che $4x^2 - y^4(1+4x) + 2y^6 = 4(x - \frac{y^2}{2})\,(x + \frac{y^2}{2} - y^4)$ e quindi

$$\{g=0\} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 := \{x = \frac{y^2}{2}\}, \qquad \Gamma_2 := \{x = -\frac{y^2}{2} + y^4\}$$

e $-\frac{1}{16}$ é appunto il minimo di $x = y^4 - \frac{y^2}{2}$.

ESERCIZIO 4. $\int_D (x\cos y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{x^2} x\cos y\,dy\,dx = \int_0^1 (x \sin x^2)\,dx =$

$$= [-\frac{1}{2}\cos(x^2)]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)$$

.