

AM3 - Esercitazione 1

12 marzo 2007

1) Dato il funzionale su $C([0, 1], \mathbb{R})$:

$$u(x) \longrightarrow \Phi(u)(x) = 1 + \int_0^1 e^{-xy} y u(y) dy,$$

determinare se e quanti punti fissi esso ammette.

2) Mostrare che il funzionale

$$u(x) \longrightarrow \Phi(u)(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x u(t) dt$$

è una contrazione su $C([0, 1], \mathbb{R})$. Determinare il punto fisso di Φ .

3) Sia B_a la palla chiusa di raggio $a > 0$ in l_2 :

$$B_a := \{x \in l_2 : \|x\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \leq a^2\}.$$

Dati $b, c > 0$ e $y \in B_b$, consideriamo il seguente funzionale su B_a :

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B_a \rightarrow \Phi(x) = (c\sqrt{|x_n y_n|})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Allora:

- verificare che Φ è a valori in l_2 ;
- determinare per quali valori di c lo spazio d'arrivo è B_a ;
- determinare quanti e quali punti fissi ammette il funzionale Φ ;
- determinare per quali valori di c il funzionale Φ è una contrazione.