

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007
GE4 - Geometria Differenziale 1

TUTORATO II - LIVIA CORSI E GABRIELE NOCCO (04-10-06)

ESERCIZIO 1. Sia k il vettore $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva (diversa da un punto). Dimostrare che $\alpha(t)$ è contenuta in un piano affine orizzontale π (cioè $z = z_0$) se e solo se il prodotto scalare $\alpha \cdot k$ è costante (cioè non dipende da t).

ESERCIZIO 2. Dire quali tra le seguenti basi sono positivamente orientate:

1. la base $\{(1, 3), (4, 2)\}$ in \mathbb{R}^2 .
2. la base $\{(1, 3, 5), (2, 3, 7), (4, 8, 3)\}$ in \mathbb{R}^3 .

ESERCIZIO 3. Nello spazio Euclideo \mathbb{R}^3 con base ortonormale $\{i, j, k\}$ il prodotto vettoriale $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è definito estendendo per bilinearità le seguenti relazione “quaternioniche”:

$$i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0$$

$$i \wedge j = -j \wedge i = k, \quad j \wedge k = -k \wedge j = i, \quad k \wedge i = -i \wedge k = j$$

Il *prodotto misto* $(u \wedge v) \cdot w$ di tre vettori $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ è il numero reale che si ottiene facendo il prodotto scalare del terzo con il prodotto vettoriale dei primi due. Mostrare che

1. $(u \wedge v) \cdot w$ è uguale al determinante della matrice 3×3 delle coordinate dei tre vettori u, v, w .
2. $(u \wedge v) \cdot w$ è uguale al volume con segno del parallelepipedo generato dai tre vettori u, v, w . Fornire un'interpretazione geometrica di questo segno.

ESERCIZIO 4. Dimostrare che il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 non è associativo.

ESERCIZIO 5. Dimostrare che per il prodotto vettoriale vale la regola di Leibniz:

$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge w(t)) = \dot{u}(t) \wedge w(t) + u(t) \wedge \dot{w}(t)$$

ESERCIZIO 6. Calcolare curvatura e torsione delle curve:

1. Cerchio di raggio R , ossia $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$.
2. Elica cilindrica $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

(sugg.: trovare l'ascissa curvilinea...)