ESERCITAZIONE UNDICI: FORMULA DI TAYLOR E INTGRALI IMPROPRI

Tiziana Raparelli

15/05/2008

1 RICHIAMI DI TEORIA

Alcuni sviluppi di Mac Laurin notevoli:

$$e^x = \Sigma_0^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad , \quad \log(1+x) = \Sigma_1^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\sin x = \Sigma_0^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \cos x = \Sigma_0^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\arctan x = \Sigma_0^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \qquad , \quad (1+x)^\alpha = \Sigma_0^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

Integrali impropri: $\forall a \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \qquad \Leftrightarrow \alpha > 1$$

mentre

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \qquad \Leftrightarrow \alpha < 1 \quad .$$

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1:
Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x+3) - \log x - 3 \sin \frac{1}{x}}{\cos \frac{1}{x} - 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}+x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \quad .$$

ESERCIZIO 2:
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{3x^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^2} \arctan(t-\frac{\pi}{2})dt \quad .$$

ESERCIZIO 3:
Calcolare i seguenti integrali impropri

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx, \qquad \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

ESERCIZIO 4 :
Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x}}\arctan\left(\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$\int_0^{+\infty} \log x \arctan\frac{1}{x}dx$$

$$\int_0^1 \frac{(e^{-x+1}-1)\sqrt{\sin x}}{(1-x)^{\frac{5}{4}}}dx$$

3 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3) - \log x - 3\sin\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x} - 1} \\
= &\lim_{y\to 0^+} \frac{\log(1+3y) - 3\sin y - \cos y}{\cos y - 1} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{3y - \frac{9}{2}y^2 - 3y + o(y^2)}{1 - \frac{1}{2}y^2 - 1 + o(y^3)} = 9
\end{aligned}
$$

avendo usato lo sviluppo di Mac Laurin delle funzioni $\cos y$ e $\log(1+t)|_{t=3y}$ al secondo ordine e lo sviluppo di Mac Laurin di $\sin y$ al primo ordine.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-x^2} + x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2} &= -\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{-x^2} + x\sin\frac{1}{x} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{x}{\sin x}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\frac{1}{2x}}
\end{aligned}
$$

avendo applicato il teorema di De l'Hospital all'esponente. Ora, sviluppando $\sin x$ fino all'ordine 3 e $\cos x$ fino all'ordine 2 in un intorno di $x_0 = 0$, troviamo il limite cercato, che è $e^{-\frac{1}{6}}$.

ESERCIZIO 2:

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la derivata di

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x^2} \arctan(t - \frac{\pi}{2})$$

è

$$f(x) = \arctan(x^2 - \frac{\pi}{2})2x$$

quindi, applicando il teorema di De l'Hospital, il limite cercato è uguale al limite seguente:

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{\arctan(x^2-\frac{\pi}{2})2x}{6x} = 0 \quad .$$

ESERCIZIO 3:

Per calcolare il primo integrale, effettuiamo il cambio di variabile $y = \frac{1}{x}$, dunque dobbiamo calcolare

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{b}} -\sin y dy = [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

ESERCIZIO 4:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \sqrt{\frac{x+1}{x}} \arctan(\frac{x}{x^2+1}) dx \\ = \quad &\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}} \arctan(\frac{x}{x^2+1}) dx + \int_1^\infty \sqrt{\frac{x+1}{x}} \arctan(\frac{x}{x^2+1}) dx \end{aligned}$$

per il primo integrale:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}} \arctan(\frac{x}{x^2+1}) dx \\ = \quad &\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}} \frac{\arctan(\frac{x}{x^2+1})}{\frac{x}{x^2+1}} \frac{x}{x^2+1} dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

e dunque, per il criterio del confronto asintotico, diverge. Anche il secondo integrale diverge, perché per $x \to +\infty$, $\sqrt{1+\frac{1}{x}} \sim 1 + \frac{1}{2x}$, $\arctan(\frac{x}{x^2+1}) \sim \arctan\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ e perciò

$$\int_1^\infty \sqrt{\frac{x+1}{x}} \arctan(\frac{x}{x^2+1}) dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad .$$

$$\int_0^{+\infty} \log x \arctan\frac{1}{x} dx = \int_0^1 \log x \arctan\frac{1}{x} dx + \int_1^{+\infty} \log x \arctan\frac{1}{x} dx$$

Il primo integrale asintoticamente va come $\int_0^1 \log x dx = x(\log x - 1)|_0^1 = 0$ (poiché $\arctan t \to \frac{\pi}{2}$ quando $t \to +\infty$), dunque converge. Il secondo integrale invece asintoticamente si comporta come $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x} dx$, che, sempre per il criterio del confronto, diverge (essendo defiitivamente maggiore di $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$).

$$\int_0^1 \frac{(e^{-x+1} - 1)\sqrt{\sin x}}{(1-x)^{\frac{5}{4}}} dx = -\int_0^1 \frac{(e^y - 1)\sqrt{\sin(1+y)}}{(y)^{\frac{5}{4}}} dy$$

avendo effettuato il cambio di variabile $y = 1 - x$, che asintoticamente ha lo stesso comportamento di $\int_0^1 y^{-\frac{1}{4}} dy$, che converge.