ESERCITAZIONE 7: INTEGRALI INDIFINITI 1

Tiziana Raparelli

15/04/2008

1 METODI DI INTEGRAZIONE

Proposizione 1.1. *Sia $f \in C^0(I)$ e $g \in C^1(I)$, allora*

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) \quad ,$$

dove $F(x)$ è un primitiva di $f(x)$ su I.

Proposizione 1.2. *Sia $f \in C^0(I)$ e $\phi \in C^1(J)$, $\phi(J) \subset I$. Allora*

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt \quad .$$

Alcune primitive di funzioni elementari:

funzione	primitiva
$x^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
x^{-1}	$\log \lvert x \rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

2 ESERCIZI

ESERCIZIO 1:
Calcolare i seguenti integrali indefiniti:
(1) $\int \log x dx$
(2) $\int e^x x^2 dx$
(3) $\int \log x(xe^x + e^x)dx$
(4) $\int \sin^2 x dx$

(5) $\int \tan x dx$
(6) $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$
(7) $\int \frac{x}{\cos^2(5x)} dx$
(8) $\int \sin(\log x) dx$
(9) $\int \frac{1}{k^2+x^2} dx, \quad k \leq 0$
(10) $\int \frac{2x+1}{x^2+4} dx.$

ESERCIZIO 2:
Sia $F(n)$ la successione definita nel seguente modo:

$$\begin{aligned} F_0(x) &= x \\ F_1(x) &= -\cos x \\ &\vdots \\ F_n(x) &= \int \sin^n(x) dx \end{aligned}$$

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sussiste la seguente formula ricorsiva:

$$F_n(x) = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} F_{n-2}(x) \quad .$$

3 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1:
(1) Si fa per parti, ponendo $f = 1$ e $g = \log x$. Si trova che

$$\int \log x dx = x(\log x - 1) + c$$

(2) Due volte per parti, ponendo la prima volta $f = e^x$, $g = x^2$ e la seconda volta $f = e^x$, $g = x$. Si ottiene:

$$\int e^x x^2 dx = e^x(x^2 - x + 1) + c$$

(3) Notando che $xe^x + e^x = (xe^x)'$, si pone $f = xe^x + e^x$ e $g = \log x$ e integrando per parti, si ottiene:

$$\int \log x(xe^x + e^x)dx = e^x(\log x - 1) + c$$

(4) Ponendo $f = g = \sin x$, si ha

$$\int \sin^2 x = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x = -\cos x \sin x + \int dx - \int \sin^2 x \quad ,$$

quindi

$$2\int \sin^2 x = -\cos x \sin x + x + c \Leftrightarrow \int \sin^2 x = \frac{1}{2}(-\cos x \sin x + x) + c$$

(5) Si osserva che $\sin(x) = -(\cos x)'$, quindi l'integrale in questione è

$$-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = \log|\cos x|$$

l'uguaglianza essendo vera in quanto se $f(x) > 0$ (e f è derivabile), $\exists \log(f(x))$ e $(\log f(x))' = |\frac{f'(x)}{f(x)}|$.
(6) Essendo $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, l'integrale in questione è

$$\int \tan x dx + \int \cot x dx = -\log|\cos x| dx + \log|\sin x| + c$$

(7) Sia $y = 5x$, quindi $x = \frac{y}{5}$ e $dx = \frac{1}{5}dy$, da cui

$$\int \frac{x}{\cos^2(5x)} dx = \frac{1}{25} \int \frac{y}{\cos^2 y} dy \quad ,$$

e, integrando per parti ($f = \frac{1}{\cos^2 y}, g = y$), si ottiene

$$\frac{1}{25}(y \tan y - \int \tan y) = \frac{1}{25}(y \tan y + \log|\cos y|) + c$$

($\tan y$ è una primitiva di $\frac{1}{\cos^2 y}$), quindi, risostituendo al posto di y, $5x$, si ha

$$\int \frac{x}{\cos^2(5x)} dx = \frac{1}{5} x \tan(5x) + \frac{1}{25} \log|\cos(5x)| + c$$

(8) Per sostituzione, ponendo $\log x = t$, da cui $x = e^t$ e $dx = e^t dt$,

$$\int \cos(\log x) = \int \cos t e^t dt = e^t \sin t + e^t \cos t - \int e^t \cos t dt$$

avendo integrato due volte per parti ($f = e^t, g = \sin t$ e $f = e^t, g = \cos t$). Dunque l'integrale in questione è

$$\frac{1}{2} e^t(\cos t + \sin t) + c = x(\cos(\log x) + \sin(\log x)) + c$$

(9) Sia $y = \frac{x}{k}$, allora devo calcolare

$$\int \frac{1}{k^2(1+y^2)} k dy = \frac{1}{k} \arctan y + c = \frac{1}{k} \arctan(\frac{x}{k}) + c$$

(10)

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4} dx = \int \frac{1}{x^2+4} dx + \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + \log(x^2+4) + c$$

ESERCIZIO 2:

Consideriamo $f = \sin x, g = \sin^{n-1} x$, allora

$$\begin{aligned} \int \sin^n x &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\Big(\int \sin^{n-2} x dx - \int \sin^n x dx\Big) \quad , \end{aligned}$$

la prima uguaglianza essendo vera poiché $(\sin^{n-1} x)' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x$). Perciò

$$n \int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + \int \sin^{n-2} x dx$$

da cui segue facilmente la tesi.