AM2-07/08: Settimana 1

SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR

Sia $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$, $\quad x_0 \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$.

POLINOMIO DI TAYLOR: $\quad P_n(x_0,h) := f(x_0) + f'(x_0)h + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$

RESTO: $\quad R_n(x_0,h) := f(x_0+h) - P_n(x_0,h)$

IN FORMA INTEGRALE: $\quad R_n(x_0,h) := \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)dt$

SECONDO LAGRANGE: $R_n(x_0,h) := \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\bar{t}_h h)$ per un $\bar{t}_h \in [0,1]$.

NOTA. $\frac{R_n(x_0,h)}{h^n} \to_{h\to 0} 0$

FORMULA DI TAYLOR(con resto in forma integrale)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \ldots + \frac{f^{(n)(x_0)}}{n!}h^n + \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)dt$$

[PROVA: Sia $\varphi(t) := f(x_0+th), t \in [0,1] |h| < \delta$. *É* $\varphi(1) = f(x)$, $\varphi(0) = f(x_0)$, $\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}(x_0+th)h^k$. *Applicare poi la 'formula di Taylor' per* φ*:* $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \varphi^{(n+1)}(t)dt$*]*

SERIE DI TAYLOR $\quad$ Sia $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

si chiama serie di Taylor di f di punto iniziale x_0

SVILUPPABILITÁ IN SERIE DI TAYLOR

f si dice **sviluppabile in serie di Taylor** attorno ad x_0 se

$$\exists r > 0 : \quad f(x_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n, \quad \forall \in (-r,r)$$

NOTA. $f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ é $C^\infty(\mathbf{R})$ ma non é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad $x_0 = 0$ perché $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

ESEMPI (di serie di Mac Laurin, cioé di punto iniziale $x_0 = 0$)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Infatti $|R_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (n+1)!\,\frac{(1-t)^n}{(1-tx)^{n+2}}dt\right|$

$$= (n+1)|x|^{n+1}\int_0^1 \frac{1}{(1-tx)^2}\left(\frac{1-t}{1-tx}\right)^n dt \le \frac{(n+1)|x|^{n+1}}{1-x} \qquad \text{perché}$$

$1-t \le 1-tx$ e $\int_0^1 \frac{1}{(1-tx)^2}dt = \frac{1}{1-x}$ (e, per induzione, $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1-tx)^{n+2}} = \frac{1}{(n+1)(1-x)}$).
Nota: in effetti, $R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Si deducono gli sviluppi $\quad \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

2. $\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ per $|x| < 1$

Infatti $|R_n(x)| = |-\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \frac{n-1!}{(1-tx)^n}dt| = \frac{|x|}{n}\int_0^1 [\frac{(1-t)|x|}{1-tx}]^n dt \le \frac{|x|^{n+1}}{n}$.

Si deduce lo sviluppo (in serie di Taylor?)

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Proposizione $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$ é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad x_0 sse $\exists r > 0 :\ R_n(x_0,h) \to_{n\to+\infty} 0\ \forall h \in [-r,r]$.

Infatti $f(x_0+h) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n = R_N(x_0,h)$.

In particolare, se esistono $r > 0, M_r > 0$ tali che

$$\sup_{|h|\le r} |f^{(n)}(x_0+h)| \le \frac{M_r n!}{r^n} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}$$

allora f é somma, per ogni $|h| < r$, della sua serie di Taylor centrata in x_0.
Infatti, $|R_n(x_0,h)| = |\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\bar{t}h)| \le \frac{M_r|h|^{n+1}}{r^{n+1}} \to_n 0$ se $|h| < r$.

In particolare, se per ogni $r > 0$ esiste $M_r > 0$ tale che

$$\max_{|x|\le r} |f^{(n)}(x)| \le M_r \quad \forall n$$

allora f é 'intera', cioé é somma della sua serie di Mac Laurin su tutto $\mathbf{R}$. Infatti, $|x| \leq r \;\Rightarrow\; |R_n(x)| \leq \frac{r^{n+1}}{n+1!} \sup_{|x|\leq r} |f^{(n+1)}(x)| \leq \frac{M_r\, r^{n+1}}{n+1!} \to_n 0 \;\Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

Si ottengono subito, ad esempio, i seguenti sviluppi in serie validi in tutto $\mathbf{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}$$

SERIE BINOMIALE

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Infatti, $\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Notiamo che, posto $a_n := \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)||x|^n}{n!}$, é $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to |x|$ e quindi $a_n \to_n 0$ se $|x| < 1$.

Poi, $1-t \leq 1+tx \quad \forall x \in (-1,1) \quad \Rightarrow$

$$|R_n(x)| \leq \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!} |x|^{n+1} \int_0^1 \Big[\frac{1-t}{1+tx}\Big]^n (1+tx)^{\alpha-1} dt$$

$$\leq \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!} |x|^{n+1} \int_0^1 (1+tx)^{\alpha-1} dt \to 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

Ad esempio, per $x \in (-1,1)$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{2n-1!!}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1!!}{2n!!} x^{2n} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^{2n}$$

NOTA. In tutti gli esempi visti il resto converge a zero per tutti e solo gli h in un intervallo del tipo $|h| < r$. Non é un caso....

SERIE DI POTENZE

Dati $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots,\quad x \in \mathbf{R}$, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \qquad (SP)$

si chiama serie di potenze .

L'insieme delle x per cui (SP) converge é necessariamente un intervallo:

Proposizione (Formula di Cauchy-Hadamard).

Sia $\quad r \;=\; (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} \qquad ((\frac{1}{0} := +\infty,\ \ \frac{1}{\infty} := 0).\quad$ Allora

$$|x| \;<\; r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;<\; +\infty, \qquad\qquad |x| \;>\; r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;=\; +\infty$$

Ció segue subito dal criterio della radice:

$$|x|\ \limsup_n\, (|a_n|)^{\frac{1}{n}} \;=\; \limsup_n\, (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} \;<\; 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;<\; +\infty$$

$$|x|\ \limsup_n\, (|a_n|)^{\frac{1}{n}} \;=\; \limsup_n\, (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} \;>\; 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;=\; +\infty$$

Raggio di convergenza. $\quad r \;=\; (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} \qquad ((\frac{1}{0} := +\infty,\ \frac{1}{\infty} := 0)$

si chiama raggio di convergenza e $\{|x| < r\}$ é l' intervallo di convergenza.

NOTA. $\exists\, r := \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \;\Rightarrow\; |a_n|^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{r} \;\Rightarrow\; r$ é raggio di convergenza.
Ad esempio, la serie di Mac Laurin di $\frac{1}{1-x}$, di $\log(1+x)$, di $(1+x)^{\alpha}, \alpha \notin \mathbf{N}$ hanno raggio di convergenza 1 (é utilericordare che $n^{\frac{1}{n}} \to_n 1$).

ESEMPI (di serie di potenze).

(1) $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 0$. Infatti $(n^n)^{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$

(2) $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = +\infty$. Infatti $\frac{(n+1)!}{n!} \to +\infty$.

(3) $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\alpha}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 1$. Infatti $(n^{\alpha})^{\frac{1}{n}} = (n^{\frac{1}{n}})^{\alpha} \to 1$

(4) $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = \frac{1}{e}$. Infatti,

$$\frac{n^n}{n!}\,\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \;=\; (\frac{n}{n+1})^n \to \frac{1}{e}.$$

NOTA. Dagli esempi precedenti si vede che una serie di potenze puó avere qualsiasi comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza. In (3) :

se $\alpha \geq 0$ la serie diverge in $x=1$ mentre non converge né diverge in $x=-1$
Se $\alpha \in [-1,0)$, la serie diverge in $x=1$ e converge in $x=-1$ (Leibnitz)
se $\alpha < -1$ la serie converge assolutamente sia in $x=1$ che in $x=-1$.

In (4) : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\ \frac{1}{e^n}\ = +\infty$ perché, da

$$n! = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}\left(\sqrt{2\pi}+O(\frac{1}{n})\right) \qquad\qquad \textbf{(formula di Stirling)}$$

segue $\frac{n^n}{n!\,e^n}\ =\ \frac{1}{\sqrt{2n\pi}\,+\,\circ(\sqrt{n})}$. Infine, la serie converge in $x=-\frac{1}{e}$ (Leibnitz).

5. $1\ +\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n-1!!}{2n!!}x^n$ (serie di Mac Laurin di $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$).
Ha raggio di convergenza 1 (come tutte le serie binomiali). Comportamento al bordo: siccome $\frac{2n-1!!}{2n!!}\ :\ \frac{2n+1!!}{2n+2!!} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1,$ la serie converge in $x=1$ (criterio di Leibnitz) mentre in $x=-1$ diverge perché, per Stirling,

$$\frac{2n-1!!}{2n!!}\ =\ \frac{2n!}{(2n!!)^2}\ =\ \frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2}\ =\ O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

Proposizione . Sia $r>0$ il raggio di convergenza di $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$. Allora

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n\right]\ =\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\ [a_n\,x^n]$$

NOTA $\limsup|n\,a_n|^{\frac{1}{n}}\ =\ \limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}$ e quindi la 'serie derivata' (ovvero la serie delle derivate) ha lo stesso raggio di convergenza della serie data.

Sia $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x|<r.$ Essendo le due serie assolutamente convergenti per ogni $|x|<r$, si ha $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ -\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}\right| =$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\ -n\,x^{n-1}\right)\right| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} n\,a_n\left[\int_0^1\left((x+th)^{n-1}\ -\ x^{n-1}\right)dt\right]\right|$$

Siccome $|(x+th)^{n-1}-x^{n-1}| = (n-1)|ht\int\limits_0^1(x+\tau th)^{n-2}d\tau| \leq (n-1)|h|(|x|+|h|)^{n-2}$ e $|x|+|h|<r$ se $|x|<r$ e h é abbastanza piccolo, concludiamo che

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ -\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}\right| \leq |h|\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,|a_n|\,\underline{r}^{n-2} \to_{h\to 0} 0$$

per qualche $\underline{r}<r$.