AM2-07: IV settimana

FUNZIONI ANALITICHE

Una funzione f si dice analitica in un intervallo aperto I se é 'localmente' somma di una serie di potenze:

$\forall x_0 \in I,\ \exists\ a_n, r > 0$ (dipendenti da x_0) tali che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ in $(x_0 - r, x_0 + r)$.

NOTA. Una funzione analitica in I, essendo localmente somma di serie di potenze, é $C^\infty(I)$ e $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$ ovvero $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ é la serie di Taylor di f attorno a x_0. Tuttavia non tutte le funzioni $C^\infty(I)$ sono analitiche in I:

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ é C^∞, con derivate di ogni ordine uguali a zero in $x = 0$: dunque f non é somma della sua serie di Taylor.

Proposizione Sia $f \in C^\infty((a, b))$. Se

$$\exists\ M,\ r > 0 : \quad \sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{M n!}{r^n} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}$$

allora f é analitica in (a, b). Piú precisamente, $\forall\ x_0 \in (a, b)$, si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap (a, b)$$

Dimostrazione. Si tratta di mostrare che $R_n(x, x_0) \to 0$ al tendere di n all'infinito, per ogni $x \in x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap [a, b]$. E infatti

$$|R_n(x, x_0)| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |f^{(n+1)}(tx + (1-t)x_0)| dt \leq M(\frac{|x - x_0|}{r})^{n+1} \to 0$$

La somma di una serie di potenze é una funzione analitica.

Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza r, e siano $0 < \underline{r} < \overline{r} < r$. Da $\limsup_k |a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{\overline{r}}$ segue che

$$\exists\ \overline{k} : \qquad |a_{j+k}| \leq \frac{1}{\overline{r}^{j+k}}, \qquad \forall k \geq \overline{k}, \ \ \forall j \in \mathbf{N}$$

Da $\qquad f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k}\, x^j \qquad$ segue

$$|x| \le \underline{r} \;\Rightarrow\; |f^{(k)}(x)| \le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} \; \frac{\underline{r}^j}{\overline{r}^j} \; \frac{1}{\overline{r}^k}$$

Usando ora la formula $\quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} x^j = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1,1), \quad$ otteniamo

$$|f^{(k)}(x)| \le \frac{k!}{\overline{r}^k (1 - \underline{r}\;\overline{r}^{-1})^{k+1}} = \frac{\overline{r}\; k!}{(\overline{r} - \underline{r})^{k+1}}, \quad \forall k \ge \overline{k}, \; |x| \le \underline{r}$$

Dalla Proposizione precedente segue che f é sviluppabile in serie di Taylor (di raggio di convergenza almeno $\overline{r} - \underline{r}$) attorno ad ogni punto dell'intervallo $[-\underline{r}, \underline{r}]$.

Principio di identitá $\quad$ Siano f, g analitiche in (a,b). Allora

$$\exists\, x_0 \in (a,b): \quad f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \;\; \forall n \in \mathbf{N} \qquad \Rightarrow \qquad f \equiv g \;\; \text{in}(a,b)$$

Dall'analiticitá: $\quad \exists \delta > 0 : f(x) = g(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad$ e quindi

$$b' := \sup\{x < b : \; f(t) = g(t) \quad \forall t \in [x_0, x]\} \ge x_0 + \delta > x_0$$

Ora, $x < b' \Rightarrow f \equiv g$ in $[x_0, x] \Rightarrow f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$ in $[x_0, b')$, $\;\forall n$.

Se fosse $b' < b$, sarebbe , per continuitá, $f^{(n)}(b') = g^{(n)}(b') \;\; \forall n$ e quindi $f \equiv g$ in un intorno di b', contraddicendo la natura di sup di b'.

Zeri di funzioni analitiche $\quad$ Una funzione analitica in (a,b) e non identicamente nulla, ha, in (a,b), solo zeri isolati.

Sia x uno zero non isolato di f, cioé esistono x_n, zeri distinti di f, tali che $x_n \to_n x \in (a,b)$, $\; f(x_n) = 0\;$. É $\; f(x) = 0 \;$ ed inoltre, per il teorema di Rolle, $\; \exists x'_n \;$ tra x_n e x $\;$ tale che $\; f'(x'_n) = 0 \;$ e quindi $\; f'(x) = \lim_n f'(x'_n) = 0 \;$ Iterando l'argomento, si trovano, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $\; x_n^{(k)} \;$ zeri di $f^{(k)}$ che convergono a x e quindi $\; f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \quad$ e quindi $f \equiv 0$.

ESERCIZIO.

$E(x) := \int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad$ é analitica in $\mathbf{R}$. Infatti

$$E(x) = \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}]\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x [\frac{t^{2n}}{n!}]\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

SERIE DI POTENZE NEL CAMPO COMPLESSO

1. Definizione $z_n \in \mathbf{C}$ converge a z $(z_n \to_n z)$ $\Leftrightarrow$ $|z_n - z| \to_n 0$.

Siccome $|z_n - z|^2 = |Rez_n - Rez|^2 + |Imz_n - Imz|^2$, si ha che:

$$z_n \to_n z \quad \Leftrightarrow \quad Rez_n \to_n Rez \quad \text{e} \quad Imz_n \to_n Imz$$

$$z_n \to_n z \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon : \quad n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |z_n - z_m| \leq \epsilon \quad (\textbf{Cauchy})$$

2. Definizione $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge sse $S_N := \sum\limits_{n=1}^{N} z_n$ converge.

$\sum_n z_n$ si dice assolutamente convergente se $\sum_n |z_n| < +\infty$.

(**Cauchy**) $\sum_n z_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon :\ |\sum\limits_{n=N}^{N+p} z_n| \leq \epsilon \quad \forall N \geq N_\epsilon,\ \forall\, p.$

In particolare, $\sum_n |z_n| < +\infty \Rightarrow \sum_n z_n$ converge e in particolare,

$\limsup_n |z_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow \sum_n |z_n| < +\infty \Rightarrow \sum z_n$ converge. Si ha cosí

3. Cauchy-Hadamard Sia $a_n \in \mathbf{C}$, $r := \limsup_n |a_n|^{-\frac{1}{n}}$. Allora

$$z \in \mathbf{C}, \quad |z| < r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \ < \ +\infty \ , \qquad |z| > r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \ = \ +\infty$$

r:= raggio di convergenza, $D_r := \{z :\ |z| < r\}$:= disco di convergenza .

ESEMPI. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ converge in $|z| < 1$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

$$\exp\ z \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{converge} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

4. Definizione $O \subset \mathbf{C}$ é aperto, se $z_0 \in O, z_n \to_n z_0 \Rightarrow z_n \in O$ definitivamente (ovvero $z_0 \in O \Rightarrow \exists D_r(z_0) := \{z \in \mathbf{C} :\ |z - z_0| < r\} \subset O$).

5. Funzioni complesse di variabile complessa. Sia $f : O \to \mathbf{C}$.

f é **continua** in $z_0 \in O \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 :\ |z - z_0| \leq \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \leq \epsilon$

f é **derivabile** in $z_0 \in O$ con derivata $f'(z_0)$ $\Leftrightarrow$

$$\forall\ \epsilon\ >\ 0\, \exists\ \ \delta > 0 :\ |z - z_0| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \ - \ f'(z_0)| \leq \epsilon$$

Anche qui, come nel caso reale: f é derivabile in $z_0 \Rightarrow f$ é continua in z_0.

6. Esercizio Sia $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza $r > 0$. Allora $f \in C^\infty(D_r)$.

Proviamo che $\frac{d^n f}{dz^n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^k \quad \forall z \in D_r$. Come nel caso reale, basta provare la formula per $n = 1$. Siano $z,\ z_0 \in D_\rho,\ \rho < r$. É

$$|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, |\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}|$$

Ora, $|z^n - z_0^n| = |(z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1})| \leq |z - z_0| n \rho^{n-1} \Rightarrow$

$$|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}| = |z^{n-1} - z_0^{n-1} + z_0(z^{n-2} - z_0^{n-2}) + \ldots + z_0^{n-2}(z - z_0)| \leq$$

$$\leq |z^{n-1} - z_0^{n-1}| + |z_0|\, |z^{n-2} - z_0^{n-2}| + \ldots + |z_0|^{n-2} |z - z_0| \leq$$

$$\leq |z - z_0| \left[(n-1)\rho^{n-2} + (n-2)|z_0|\rho^{n-3} + \ldots + |z_0|^{n-2}\right] \leq \frac{n(n-1)}{2} |z - z_0|\, \rho^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, |\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1}| \leq |z - z_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, \frac{n(n-1)}{2}\, \rho^{n-2} \to_{z \to z_0} 0$$

perché $\rho < r \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, \frac{n(n-1)}{2}\, \rho^{n-2} < +\infty$.

7. $\exp(z + w) = \exp z + \exp w \qquad \forall\, z,\, w \in \mathbf{C}$. Segue da

8. Lemma (Prodotto secondo Cauchy). $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |w_n| < +\infty \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sum_{j+k=n} z_j\, w_k| < +\infty\ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j+k=n} z_j\, w_k) = (\sum_{n=0}^{\infty} z_n)\ (\sum_{n=0}^{\infty} w_n)$$

Infatti, $\exp(z + w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n!} \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j!\,k!} z^j\, w^k) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!}) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!})\, (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}) = \exp z\, \exp w$$

In particolare, $(\exp z)^p = \exp(pz) \quad \forall p \in \mathbf{N},\ z \in \mathbf{C}$, $\exp p = (\exp 1)^p =: e^p$, $(\exp(\frac{1}{p}))^p = e$. Dunque $\exp(\frac{1}{p}) = e^{\frac{1}{p}}$ e quindi $\exp(\frac{p}{q}) = (\exp \frac{1}{q})^p = (e^{\frac{1}{q}})^p = e^{\frac{p}{q}}$: $x \to \exp x,\ \ x \in \mathbf{R}$ é prolungamento continuo di $r \to e^r, r \in \mathbf{Q}$.

9. Formule di Eulero $\quad \exp\,(\pm\, it) \;=\; \cos t \;\pm\; i \sin t \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$

$$\sin t \;=\; \frac{\exp(it) \;-\; \exp(-it)}{2i}, \qquad \cos t \;=\; \frac{\exp(it) \;+\; \exp(-it)}{2} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Da $\exp(it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$ segue $Re(\exp it) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \cos t$, $Im(\exp it) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin t$. In particolare, $\exp(2k\pi i) = 1 \;\; \forall k \in \mathbf{Z}$, cioé $t \to \exp\,(it) \;\; t \in \mathbf{R}$ é 2π-periodica.

Infine, da 7., $\exp\,(x+iy) = \exp x \exp\,(iy) = e^x(\cos t + i \sin t)$. In particolare, $\exp\,(z + 2\pi i) \;=\; \exp\; z, \;\; \forall z$.

10. $\quad (i) \quad \exp\,(-z) \;=\; (\exp z)^{-1} \qquad (ii) \quad \overline{\exp z} \;=\; \exp\, \overline{z}$

$$(iii)\;\; |\exp\;(it)| \;=\; 1 \;\; \forall t \in \mathbf{R} \;\; \text{e} \;\; |z| = 1 \;\;\Rightarrow\;\; \exists\; !\; t \in (-\pi, \pi] : \;\; z \;=\; \exp(it)$$

$$(i)\;\; \exp z\; \exp\,(-z) \;=\; 1 \quad (ii)\;\; \exp\; \overline{z} \;=\; \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{z}^n}{n!} \;=\; \lim_{N \to +\infty} \overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} \;=\; \overline{\exp z}$$

$(iii)\;\; |\exp\;(it)|^2 \;=\; \exp\;(it)\;\overline{\exp\;(it)} \;=\; \exp\;(it)\;\exp\;(-it) \;=\; 1$. Poi, $z \;=\; x + iy, \;\; x^2 + y^2 \;=\; 1 \;\;\Rightarrow\;\; \exists\; !\; t \in [0, \pi] : \;\; x \;=\; \cos t$ e $y \;=\; \sin t$ se $y \geq 0, \;\; x = \cos(-t), \;\; y = \sin(-t)$ se $y \;<\; 0$.

11. Funzioni circolari ed iperboliche sui complessi

$$\cos z \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

$$\sinh z \;:=\; \frac{1}{2}(\exp z \;-\exp(-z)) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

$$\cosh z \;:=\; \frac{1}{2}(\exp z \;+\exp(-z)) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall z \in \mathbf{C}$$

12. $\quad (i) \quad \exp\,(iz) \;\equiv\; \cos z + i \sin z, \qquad \exp\,(-iz) \;\equiv\; \cos z - i \sin z$

$$(ii)\;\; \cos z \equiv \frac{\exp(iz) + \exp\,(-iz)}{2} \equiv \cosh iz \qquad \sin z \equiv \frac{\exp\,(iz) - \exp\,(-iz)}{2i} \;\equiv\; \frac{\sinh(iz)}{i}$$

Da (ii) segue: $\sin z, \cos z$ sono funzioni 2π-periodiche mentre $\sinh z, \cosh z$ sono $2\pi i$-periodiche. Inoltre, $\sin^2 z \;+\; \cos^2 z \equiv 1, \;\; \cosh^2 z \;-\; \sinh^2 z \equiv 1$

13. Definizione di $\arg z, \quad \log z, \quad z \in \mathbf{C}$

Dato $z \in \mathbf{C}$, $\arg z$ (**argomento di** z) é l'unico reale in $(-\pi, \pi]$ tale che

$$z = |z| \exp(i \arg z)$$

Notiamo che, per periodicitá, $z = |z| \exp(i(\arg z + 2k\pi)) \ \forall k \in \mathbf{Z}$. Scriveremo

$$Arg\, z := \{\arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}\}$$

Ora, dato $w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0$

$$\exp z = w \quad \Leftrightarrow \quad \exp(Re\, z) \exp(i\, Im\, z) = |w| \exp(i \arg w) \quad \Leftrightarrow$$

$$\exp Re\, z = |w| \quad \text{e} \quad Im\, z - \arg w \in 2\pi\, \mathbf{Z} \qquad \text{cioé}$$

$$\exp z = w \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{\log|w| + i\, Arg\, w\}$$

Porremo $$Log\, w := \{\log|w| + i\, Arg\, w\} \qquad \forall w \in \mathbf{C}, \quad w \neq 0$$

La funzione $log\, w := \log|w| + i \arg w$ si chiama valore principale del logaritmo.

Esempi. $Log\, x = \log x + 2k\pi i, \ \forall x > 0, \ Log\, x = \log|x| + (2k+1)\pi i, \ \forall x < 0.$
$log(-1) = \pi i, \ log\, i = \frac{\pi}{2} i, \ Log(1-i) = \log\sqrt{2} + (2k - \frac{1}{4})\pi i.$

Esercizi. $Log(zw) = Log\, z + Log\, w$ ove, per $A, B \subset \mathbf{C}$, $A + B := \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\}$. Infatti $Arg(zw) = Arg\, z + Arg\, w$.

$$Log(-z) = Log\, z + \pi i \qquad \forall z \neq 0.$$

Trovare l'errore in $z^2 = (-z)^2 \Rightarrow Log(z)^2 = Log(-z)^2 \Rightarrow Log z + Log z = Log(-z) + Log(-z) \Rightarrow 2 Log z = 2 Log(-z) \Rightarrow Log z = Log(-z)$.

14. Potenze in C Se $w, z \in C, w \neq 0$

$$w^z := \exp(z\, Log\, w) = \exp\{z\ [\log|w| + i(arg\, w + 2k\pi)]\} \qquad k \in \mathbf{Z}$$

Esempi. Sia $z = n \in \mathbf{N}$; $w^n = \exp\{n\ [\log|w| + i(arg\, w + 2k\pi)]\} = \exp\{n \log|w|\} \exp\{n\, i(arg\, w + 2k\pi)\} = |w|^n [\exp\{i(arg\, w + 2k\pi)\}]^n = w \times \ldots \times w$ (n volte).

Se $z = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, $a^{\frac{1}{n}} = \{|a|^{\frac{1}{n}} \exp i\, \frac{arg\, a + 2k\pi}{n}, \ k = 0, \ldots, n-1\}$ (le n radici complesse di a). Se $z \notin \mathbf{Q}$, a^z é un insieme infinito. In particolare, $e^z = \exp z$ se e solo se $z \in \mathbf{Z}$.

APPENDICE

A1: Prova di 8. Siano $s_N := \sum_{n=0}^{N} z_n, \quad \sigma_N := \sum_{n=0}^{N} w_n$

$$p_N := \sum_{n=0}^{N}(\sum_{j+k=n} z_j w_k) = z_0w_0+(z_0w_1+z_1w_0)+\ldots+(z_0w_N+z_1w_{N-1}+\ldots+z_{N-1}w_1+z_Nw_0)$$

$= z_0(w_0+w_1+\ldots+w_N)+z_1(w_0+\ldots+w_{N-1})+\ldots+z_Nw_0.$ Dunque

$$|s_N\,\sigma_N - p_N| =$$

$|z_0(w_0+\ldots+w_N)+z_1(w_0+\ldots+w_N)+\ldots+z_{N-1}(w_0+\ldots+w_N)+z_N(w_0+\ldots+w_N)-$

$[z_0\,(w_0+w_1+\ldots+w_N)+z_1\,(w_0+\ldots+w_{N-1})+\ldots+z_{N-1}(w_0+w_1)+z_N\,w_0]| =$

$|z_1\,w_N + z_2(w_{N-1}+w_N)+\ldots+z_{N-1}(w_2+\ldots+w_N)+z_N\,(w_1+\ldots+w_N)| \le$

$$\le \sum_{j=1}^{n}\left[|z_j|\,|\sum_{i=1}^{j} w_{N-j+i}|\right] + \sum_{j=n+1}^{N}\left[|z_j|\,|\sum_{i=1}^{j} w_{N-j+i}|\right] \le$$

$\le \left[\sum_{j=1}^{n}|z_j|\right]\left[\sum_{k=N-n+1}^{\infty}|w_k|\right]+\left[\sum_{j\ge n+1}|z_j|\right]\left[\sum_{k=1}^{\infty}|w_k|\right] \qquad n := [\frac{N}{2}].$ Da

$\sum_{k=N-[\frac{N}{2}]+1}^{\infty}|w_k| \to_{N\to+\infty} 0, \ \sum_{j\ge[\frac{N}{2}]+1}|z_j| \to_{N\to+\infty} 0, \ \sum_j |z_j| < +\infty, \ \sum_{k=1}^{\infty}|w_k| < \infty$
segue $|s_N\,\sigma_N - p_N| \to_{N\to+\infty} 0$ e quindi $\lim_N p_N = \lim_N s_N\,\sigma_N.$

ESERCIZIO. $e := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ É

$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ perché $\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{(n-k)!(n-k-1)\ldots n}{(n-k)!n\,n\ldots n} < 1$

e quindi
$$\limsup_n (1+\frac{1}{n})^n \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Viceversa, $n > n_0 \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n > \sum_{k=0}^{n_0}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n^k} \Rightarrow \liminf_n(1+\frac{1}{n})^n \ge \sum_{k=0}^{n_0}\frac{1}{k!}, \ \forall n_0$

perché $\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = (1-\frac{1}{n})\,(1-\frac{2}{n})\,\ldots(1-\frac{k-1}{n}) \to_n 1.$ Quindi

$$\liminf_n (1+\frac{1}{n})^n \ge \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$