AM2: Tracce delle lezioni- VII Settimana

Cammini differenziabili.
Se $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $x_i \in C^1([0,1])$ $\forall i = 1, \ldots, n$ scriveremo $\gamma \in C^1([0,1], \mathbf{R}^n)$ e diremo che γ é cammino differenziabile e

$\dot\gamma(t) = (\dot x_1(t), \ldots, \dot x_n(t))$ é il **vettore tangente** a γ in $\gamma(t)$.

Esempio. $\gamma(t) = (r\cos 2\pi t, r\sin 2\pi t)$, $t \in [0,1]$, $\dot\gamma(t) = (-2\pi r \sin 2\pi t, 2\pi r\cos 2\pi t)$

Sia $f \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^2)$, $h \in \mathbf{R}^2$. Sia $\gamma(t) = (th, f(th))$ parametrizzazione della curva ottenuta intersecando il grafico di f con il piano passante per l'asse delle z e per la retta che unisce h all'origine. Il vettore tangente alla curva γ in $(0,0,f(0,0))$ é

$$(h, < \nabla f(0,0), h >) = (\frac{d}{dt}(th), \frac{d}{dt} f(th))_{|\{t=0\}}$$

Al variare di h in $\mathbf{R}^2$ si ottengono tutti i **vettori tangenti al grafico di** f in $(0,0)$).
Questi sono tutti e soli i punti del piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione

$$x_3 = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)x_2$$

Tale piano approssima il grafico di f a meno di errori di ordine superiore al primo (piano tangente).

Derivazione lungo un cammino (derivazione di funzioni composte)

Sia $f \in C^1(O)$, $\gamma \in C^1([0,1], O)$ Allora

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \;\; =< \; \nabla f(\gamma(t), \dot\gamma(t) \; >$$

É: $\gamma(t+s) = \gamma(t) + \dot\gamma(t)s + h(s)$, $f(u+h) = f(u) + < \nabla f(u), h > + \sigma(h) \;\; \Rightarrow$

$$f(\gamma(t+s)) \; = \; f(\gamma(t)) + \; < \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) > \; s \; + \; \circ(s) \quad \text{ove}$$

$\circ(s) :=< \nabla f(\gamma(t)), h(s) > + \sigma(\dot\gamma(t)s + h(s))$. Infatti $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0, s_e > 0$:

$(||k|| \le \delta_\epsilon \;\; \Rightarrow \;\; \sigma(k) \le \epsilon ||k||)$ e $(|s| \le s_\epsilon \;\; \Rightarrow \;\; ||h(s)|| \le \epsilon |s|$ e $||\dot\gamma(t)|||s| + ||h(s)|| \le \delta_\epsilon)$

$\Rightarrow \;\; | < \nabla f(\gamma(t)), h(s) > \; + \sigma(\dot\gamma(t)s \; + \; h(s))| \le \epsilon \, |s| \, (||\nabla f(\gamma(t))|| \; + \; ||\dot\gamma(t)|| \; + \; 1).$

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $f \in C^1(O)$, $O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Se f_{x_j} sono a loro volta derivabili, allora

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

sono le derivate seconde.

Se $f_{x_i x_j} \in C(O)$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$, f si dice di classe $C^2(O)$.

LEMMA DI SCHWARTZ

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

Prova. Sia, per semplicitá, $n = 2$. Sia $R_\delta := [\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta] \times [\overline{y}-\delta, \overline{y}+\delta]$, $\delta << r$, $D_r(\overline{x}, \overline{y}) \subset O$. Si ha:

$$I_\delta := \frac{1}{4\delta^2} \int_{\overline{x}-\delta}^{\overline{x}+\delta} \left(\int_{\overline{y}-\delta}^{\overline{y}+\delta} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy \right) dx = \frac{1}{4\delta^2} \int_{\overline{x}-\delta}^{\overline{x}+\delta} [\frac{\partial f}{\partial x}(x, \overline{y}+\delta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, \overline{y}-\delta)]\, dx =$$

$$\frac{1}{4\delta^2} \left[f(\overline{x}+\delta, \overline{y}+\delta) - f(\overline{x}-\delta, \overline{y}+\delta) - f(\overline{x}+\delta, \overline{y}-\delta) + f(\overline{x}-\delta, \overline{y}-\delta) \right] =$$

$$= \frac{1}{4\delta^2} \int_{\overline{y}-\delta}^{\overline{y}+\delta} [\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}+\delta, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}-\delta, y)]\, dy = \frac{1}{4\delta^2} \int_{\overline{y}-\delta}^{\overline{y}+\delta} \left(\int_{\overline{x}-\delta}^{\overline{x}+\delta} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx \right) dy$$

Siccome $x \to \left(\int_{\overline{y}-\delta}^{\overline{y}+\delta} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy \right) dx$ é continua, per il teorema della media esiste $x_\delta \in [\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta]$ tale che $\int_{\overline{x}-\delta}^{\overline{x}+\delta} \left(\int_{\overline{y}-\delta}^{\overline{y}+\delta} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy \right) dx = 2\delta \left(\int_{\overline{y}-\delta}^{\overline{y}+\delta} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x_\delta, y)\, dy \right)$.
Con un'altra applicazione del teorema della media, e mandando δ a zero, otteniamo

$$\exists (x_\delta, y_\delta) \in R_\delta : I_\delta = \frac{1}{4\delta^2} \int_{\overline{x}-\delta}^{\overline{x}+\delta} \left(\int_{\overline{y}-\delta}^{\overline{y}+\delta} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy \right) dx = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_\delta, y_\delta) \to_\delta f_{yx}(\overline{x}, \overline{y})$$

e analogamente

$$\exists (x^\delta, y^\delta) \in R_\delta : I_\delta = \frac{1}{4\delta^2} \int_{\overline{y}-\delta}^{\overline{y}+\delta} \left(\int_{\overline{x}-\delta}^{\overline{x}+\delta} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx \right) dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^\delta, y^\delta) \to_\delta f_{xy}(\overline{x}, \overline{y}).$$

MATRICE HESSIANA

Sia $f \in C^2(O)$ ed indichiamo con $u = (x_1, \ldots, x_n)$ i punti di $\mathbf{R}^n$. La matrice $n \times n$ delle derivate seconde

$$H_f(u) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(u) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

é detta matrice Hessiana . Dal Lemma di Schwartz: H_f é **matrice simmetrica**.

FORMULA DI TAYLOR (al secondo ordine)

Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Allora:

$$f(u+h) \;=\; f(u) + \;< \nabla f(u) \,,\, h > \,+ \frac{1}{2} < H_f(u)\, h,\; h > \;+\; \circ\,(||h||^2)$$

Prova. Sia $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Posto $\varphi(t) := f(u + th)$, é

$$\varphi(0) \;=\; f(u), \qquad\qquad \varphi(1) \;=\; f(u+th)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(u+th) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th)h_j$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(u+th) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th)h_j \;=\; \sum_{j=1}^{n}\,\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u+th)h_i h_j \;=$$

$$= < H_f(u \;+\; t\,h)\, h,\; h >$$

Ma $\varphi(1) \;=\; \varphi(0) \;+\; \varphi'(0) \;+\; \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\, dt$ e quindi

$$f(u+h) \;=\; f(u) \;+\; < \nabla f(u) \,,\, h > \;+\; \frac{1}{2} < H_f(u)h, h > \;+$$

$$\int_0^1 (1-t) \;<\; [H_f(u+th) \;-\; H_f(u)]\, h, h > \;\; dt.$$

La stima del resto segue da

$$\forall \epsilon > 0 \;\exists \delta_\epsilon > 0 : \;\; |t| \le \delta_\epsilon \;\;\Rightarrow\;\; |f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u)| \le \epsilon \;\;\Rightarrow$$

$$|\sum_{i,j=1}^{n} \left[f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u) \right] \; h_i h_j \,| \;\le n^2 \epsilon ||h||^2$$

MASSIMI E MINIMI IN PIÚ VARIABILI

$u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per $f \;\Leftrightarrow\; \exists \delta > 0 : \;\; f(u) \leq f(v) \;\; \forall v \in D_\delta(u)$

Condizioni necessarie. Se $u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per f, allora

(i) $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) \,=\, 0$ (u é **critico** o **stazionario** per f)

(ii) $f \in C^2(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, h,\; h > \geq\; 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$

Prova. (i) $h \in \mathbf{R}^n, \quad |t| \leq \delta_h \quad \Rightarrow \quad f(u) \leq f(u+th) \quad \Rightarrow$

$$0 \;=\; \tfrac{d}{dt}\, f(u+th)_{|t=0} \;=< \nabla f(u), h > \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) \;=\; 0.$$

(ii) Dalla formula di Taylor: $\quad \nabla f(u) \,=\, 0, \quad 0 \,\leq\, f(u+h) - f(u) \,=$

$$\nabla f(u) + ||h||^2\, [< H_f(u)\, \frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||} > \,+\, \circ\,(1)] \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, \frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||} \;> \;\geq\; 0$$

Una condizioni sufficente. Sia $f \in C^2(D_r(u))$, e $\nabla f(u) = 0$:

$$< H_f(u)\, h, h > \; > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\; h \neq 0, \quad \Rightarrow \quad u \quad \text{é minimo locale}$$

Prova. $h \to < H_f(u) h, h >$ continua, $< H_f(u) h, h > \;>\; 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, h \neq 0, \;\Rightarrow$

$$\exists\, m := \; \min_{\|h\|=1} \; < H_f(u)\, h, h > \;>\; 0$$

Quindi, $< H_f(u)\, h, h > \;\geq\; m\, \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$. Allora, usando Taylor e $\nabla f(u) = 0$ vediamo che $0 < \|h\| \;<<\; 1 \;\Rightarrow$

$$f(u+h) - f(u) \;=\; \|h\|^2\; [< H_f(u)\, \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} > \;+\; \circ\,(1)] \;\geq\; \|h\|^2\; [m \,+\, \circ(1)] \;>\; 0$$

Massimi locali liberi Se invece $\exists \delta > 0 : \;\; f(u) \geq f(v) \;\; \forall v \in D_\delta(u)$, u si dice massimo locale libero per f. Anche in tal caso, se $f \in C^1(D_r(u))$, necessariamente $\nabla f(u) = 0$, mentre, se $f \in C^2(D_r(u))$, allora $< H_f(u)\, h,\; h > \leq\; 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$.

Analogamente, la condizione sufficente perché u sia massimo locale libero per $f \in C^2(D_r(u))$ é che

$$\nabla f(u) = 0 \quad \text{e} \quad < H_f(u)\, h, h > \; < 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\; h \neq 0$$

Forme quadratiche

La natura di un punto stazionario $u = (x_1, \ldots, x_n)$ di f dipende dalle proprietá di segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana

$$< H_f(u)\, h,\ h > \ = \ \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u)\, h_i\, h_j \ = \qquad\qquad h = (h_1, \ldots, h_n)$$

Ora, $H_f(u)$ simmetrica $\Rightarrow$ $H_f(u)$ ha autovalori reali, diciamo $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Le proprietá di segno della forma quadratica associata sono legate al segno degli autovalori. Diamo qui una dimostrazione analitica di questo fatto.

Sia $\mathcal{A}=(a_{ij})_{ij=1,\ldots,n}=\mathcal{A}^{\,t}$ matrice $n\times n$ simmetrica. La forma quadratica associata

$$< \mathcal{A}\ h,\ h >:= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j, \qquad h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n$$ si dice

definita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\ h,\ h > > \ 0\,(< 0),\ \ \forall\, h \neq (0,0)$

semidefinita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\ h,\ h > \geq \ 0\,(\leq 0),\ \ \forall\, h \in \mathbf{R}^n$

Proposizione Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrice simmetrica $n \times n$, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora

$$\lambda_1 = \inf_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h > \qquad\qquad \lambda_n = \sup_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h >$$

Prova. Sia $m := < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} > = \min\limits_{\|h\|=1} < \mathcal{A}h, h > = \min\limits_{\|h\|\neq 0} \frac{<\mathcal{A}h,h>}{\|h\|^2}$. Siccome $\nabla < \mathcal{A}h, h >= 2\mathcal{A}h$ e $\nabla \|h\|^{-2} = 2\frac{h}{\|h\|^4}$ e quindi

$$\nabla \frac{< \mathcal{A}h, h >}{\|h\|^2} = 2\frac{\mathcal{A}h}{\|h\|^2} - 2 < \mathcal{A}h, h > \frac{h}{\|h\|^4} = 0$$

se $h = \overline{h}$ e quindi $\mathcal{A}\overline{h} =< \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} > \overline{h} = m\overline{h}$

Dunque m é un autovalore di $\mathcal{A}$, necessariamente il piú piccolo, giacché $\mathcal{A}h = \lambda h,\ ||h|| = 1 \ \Rightarrow\ \lambda \ =< \mathcal{A}h, h > \geq\ m.$

Corollario

(ii) $\mathcal{A}$ é definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 > 0\ \ (\lambda_n < 0)$

(iii) $\mathcal{A}$ é semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = 0\ \ (\lambda_n = 0)$

ESEMPI. **1.** Sia $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$

É $f_x = 4x(x^2+y^2) - 4x,$ $f_y = 4y(x^2+y^2) + 4y$

$f_{xx} = 4(x^2+y^2) + 8x^2 - 4,$ $f_{xy} = 8xy,$ $f_{yy} = 4(x^2+y^2) + 8y^2 + 4$

Punti stazionari: $(0,0),\ (\pm 1, 0))$; $\det H(\pm 1,0) > 0$, $\det H(0,0) < 0$; $(\pm 1, 0)$ sono **minimi globali**: $\|u\| \to +\infty \Rightarrow f(u) \to +\infty$; $(0,0)$ é una sella.

2. Sia $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Notiamo che $\nabla g = 0 \iff x^2 = y,\ \ y^2 = x$ e quindi $(0,0),(1,1)$ sono gli unici punti critici di g. Poi

$g_{xx} = 6x, g_{yy} = 6y, g_{xy} = -3$ e quindi

- $H_f(0,0)$ ha autovalori ± 3 e quindi $(0,0)$ é di sella

- $H_f(1,1)$ ha autovalori positivi e quindi $(1,1)$ é di minimo, infatti il punto di minimo assoluto di g.

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

DIPENDENZA CONTINUA

Sia $f \in C((t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times (a,b)),\ -\infty \le a < b \le +\infty$. Supponiamo

(equidominatezza) $\exists\ g$ integrabile in (a,b) : $|f(t,x| \le g(x) \quad \forall t, x$

$$\text{Allora} \qquad t \to \int_a^b f(t,x)\,dx \quad \text{é continua in} \quad (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

Prova. Grazie ad Heine-Cantor, $t_n \to t \Rightarrow f_n(x) := f(t_n, x)$ converge uniformemente sui sottoinsiemi chiusi e limitati di (a,b). Ció, insieme alla equidominatezza, assicura che $\int_a^b f(t_n,x)\,dx \to \int_a^b f(t,x)\,dx$.

DERIVAZIONE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE.

Sia $f \in C([t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times (a,b)),\ -\infty \le a < b \le +\infty$. Supponiamo che

i) $\frac{\partial f}{\partial t}$ esiste ed é continua in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times (a,b)$

ii) $\exists\ g$ integrabile in (a,b) : $|f_t(t,x| \le g(x) \quad \forall t, x.$

Allora $\qquad t \to \int\limits_a^b f(t,x)\,dx \quad$ é derivabile $\qquad \forall\, t \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \quad$ e

$$\frac{d}{dt}\int\limits_a^b f(t,x)\,dx \;=\; \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$$

Prova. Sia $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$, $\;\tau_n \to 0$. $\quad$ É $\quad \frac{f(t+\tau_n,x)\,-\,f(t,x)}{\tau_n} - f_t(t,x) \;=$

$$\frac{1}{\tau_n}\int\limits_0^1 [\frac{d}{ds}f(t+s\tau_n,x)]\,ds \;-\, f_t(t,x) \;=\; \int\limits_0^1 [f_t(t+s\tau_n,x)-f_t(t,x)]\,ds \to_n 0$$

uniformemente in $x \in [c,d] \subset (a,b)$ (Heine-Cantor). $\quad$ Inoltre

$$\int\limits_0^1 |f_t(t+s\tau_n,x)-f_t(t,x)|\,ds \;\le\; 2g(x)$$

Dunque

$$\left|\frac{\int\limits_a^b f(t+\tau_n,x)\,dx - \int\limits_a^b f(t,x)dx}{\tau_n} - \int\limits_a^b f_t(t,x)\,dx\right| \le$$

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_0^1 |f_t(t+s\tau_n,x)-f_t(t,x)]\,ds|\right]\,dx \;\to_n 0$$

ESEMPIO. $f(t,x) \;=\; \frac{\sin x}{x}\,e^{-tx}$, $\;f_t(t,x) \;=\; -\sin x e^{-tx}$, $\;t \;>\; 0$, $\;x \in \mathbf{R}\;$ sono continue.

Inoltre $t \ge t_0 > 0 \;\Rightarrow\; |f(t,x)| + |f_t(t,x)| \;\le\; e^{-t_0 x} \quad$ e $\quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-t_0 x}\,dx \;=\; \frac{1}{t_0}$.

Dunque $\quad \frac{d}{dt}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-tx}\,dx \;=\; -\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x\,dx$. Integrando per parti si ottiene

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,e^{-tx}\,dx \;=\; -\frac{1}{1+t^2}$$

CONVOLUZIONE $\quad$ Siano $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\;\varphi \in C_0^\infty \quad f$ continua. Allora

$$(f*\varphi)(x) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\varphi(y)\,dy \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)\,dt \;=\; (\varphi * f)(x)$$

é $\quad C^\infty \quad$ e

$$\frac{d^k}{dx^k}(f*\varphi)(x) \;=\; (f*\frac{d^k\varphi}{dx^k})(x)$$

Prova. La prima affermazione segue effettuando il cambio di variabile $t = x-y$. Si puó dunque derivare sotto segno di integrale, giacché cé' equidominatezza:

$$|\frac{d^k}{dx^k} f(t)g(x-t)| \;=\; |f(t)\, g^{(k)}(x-t)| \;\leq\; c_k |f(t)| \chi_{[-R,R]}, \;\; c_k := \sup_{x \in \mathbf{R}} |g^{(k)}(x)|$$

ove R é tale che $g(x-t) = 0$ se $|t| \geq R$ e $|x| \leq c$.

REGOLARIZZAZIONE PER CONVOLUZIONE

Sia $\varphi \in C_0^\infty$, $\varphi \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \;=\; 1$ (φ **nucleo regolarizzante**).

Sia $\varphi_\epsilon(x) \;:=\; \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. (**successione regolarizzante**)

Sia f continua. Allora

$$f * \varphi_\epsilon \rightarrow_{\epsilon \to 0} f \quad \text{uniformemente sui limitati}$$

Prova .

$$\varphi_\epsilon(x) = 0 \text{ se } |x| \geq \epsilon \quad \text{e} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\epsilon(x-y)\, dy \;=\; 1 \quad \Rightarrow$$

$$\sup_{|x| \leq R} |f(x) - (f * \varphi_\epsilon)(x)| \leq \sup_{|x| \leq R} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(y)| \varphi_\epsilon(x-y) dy \leq \sup_{|x| \leq R,\, |x-y| \leq \epsilon} |f(x) - f(y)|$$

Ma $\sup\limits_{|x| \leq R,\, |x-y| \leq \epsilon} |f(x) - f(y)| \rightarrow_{\epsilon \to 0} 0$, perché

f é uniformemente continua in $[R-\epsilon,\; R+\epsilon]$.