AM2: Tracce delle lezioni- Settimana 11

PROBLEMA DI CAUCHY: prolungabilitá, soluzione massimale, esistenza globale

Proposizione 1: Unicitá globale Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^n)$, O aperto in $\mathbf{R}^n$. Siano $\gamma \in C^1((a,b))$ e $\beta \in C^1((\tilde{a}, \tilde{b}))$ soluzioni dello stesso problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

Se $(a,b) \subset (\tilde{a}, \tilde{b})$, allora $\gamma \equiv \beta$ in (a,b): β é un prolungamento della soluzione γ.

Per il Teorema di Picard, esiste $\delta > 0$ tale che $\gamma \equiv \beta$ in $|t| \le \delta$. Quindi

$$\bar{t} := \sup\{t : \quad \gamma(\tau) = \beta(\tau),\ \forall \tau \in [0,t]\}$$

é ben definito e maggiore o uguale a δ. Si tratta di mostrare che $\bar{t} = b$. Sia per assurdo $\bar{t} < b$. Per continuitá, é allora anche $\gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$ e inoltre $\gamma(t), \beta(t)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale in $(0, \bar{t}]$. Dunque γ, β sono entrambe soluzioni del medesimo problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(\bar{t}) = \gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$$

e quindi coincidono anche in $[\bar{t}, \bar{t} + \sigma]$ per un $\sigma > 0$ piccolo, e quindi

$$\bar{t} := \sup\{t : \quad \gamma(\tau) = \beta(\tau),\ \forall \tau \in [0,t]\} \ge \bar{t} + \sigma$$

contraddizione. Dunque $\gamma \equiv \beta$ in $[0,b)$ e, analogamente, $\gamma \equiv \beta$ in $(a,0]$).

Una soluzione non prolungabile si chiama **soluzione massimale**. La soluzione massimale é evidentemente unica ed il suo intervallo di definizione si chiama **intervallo massimale di esistenza** e si indica $(t^-(x_0), t^+(x_0))$, o semplicemente, se non vi é ambiguitá, (t^-, t^+).

Se $t^-(x_0) = -\infty$, $t^+(x_0) = +\infty$, diremo che il Problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = x_0$ ammette **soluzione globale** o per tutti i tempi.

ESEMPI.

Il problema di Cauchy $\dot{x} = x$, $x(0) = x_0$ ha come soluzione massimale $x(t) = x_0 e^t$, $t \in \mathbf{R}$

mentre il problema $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$ ha come soluzione massimale $x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}$, $t \in (-\infty, \frac{1}{x_0})$.

Proposizione 2: prolungabilitá. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$.
Sia $\dot\gamma(t) = f(\gamma(t)), \quad t \in [0,T)$. Se

$$M := \sup_{t\in[0,T)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty$$

allora γ é prolungabile oltre T.
In particolare, se $\gamma(t)$ é soluzione massimale e $\sup_{t\in(t^-,t^+)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty$ allora $t^- = -\infty, t^+ = +\infty$.
In particolare, se γ massimale é limitata allora γ é definita per tutti i tempi.

Da $\|\gamma(t) - \gamma(s)\| = \|\int_s^t f(\gamma(\tau))d\tau\| \le M|t-s| \quad \forall s,t \in [0,T)$ (γ é uniformemente continua in $[0,T)$) segue che esiste $\gamma(T) := \lim_{t\to T^-}\gamma(t)$ e $\dot\gamma(T) = f(\gamma(T))$. Detta allora $\hat\gamma$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $\hat\gamma(T) = \gamma(T)$, la funzione uguale a γ in $[0,T)$ ed uguale a $\hat\gamma$ in $[T, T+\delta]$ é di classe C^1 ed é soluzione del sistema differenziale in $[0, T+\delta]$.

ESEMPI.

Sistemi Hamiltoniani. Sia $H \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n), H = H(x,y), x, y \in \mathbf{R}^n$. Il sistema differenziale

$$\dot x = H_y(x,y), \qquad \dot y = -H_x(x,y)$$

si chiama sistema Hamiltoniano (autonomo) a n gradi di libertá, H é funzione Hamiltoniana (o energia totale).
Una semplice proprietá dei sistemi Hamiltoniani é la seguente: se $(x(t), y(t))$ é soluzione, allora

$$\frac{d}{dt}H(x(t),y(t)) = H_x(x(t),y(t))\dot x + H_y(x(t),y(t))\dot y = -\dot y \dot x + \dot x \dot y \equiv 0$$

cioé H é costante lungo le traiettorie. Tale fatto si esprime dicendo che H (l'energia) si conserva durante il moto ('i sistemi Hamiltoniani sono conservativi') o anche che H é una costante del moto, od anche che 'é un integrale primo' del moto.

In altre parole, le traiettorie di un sistema hamiltoniano sono contenute in insiemi di livello dell'Hamiltoniana H. Una conseguenza di questo fatto é che se le superfici di livello di H sono compatte, allora le soluzioni del sistema sono definite per tutti i tempi (esistenza globale).

Sistemi gradiente. Sia $F \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ e consideriamo il sistema differenziale:

$$\dot x = -\nabla F(x)$$

Una semplice proprietá é la seguente: se $\dot{x}(t) = -\nabla F(x(t))$ e $\nabla F(x(0)) \neq 0$ allora

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) =< \nabla F(x(t)), \dot{x}(t) >= -\|\nabla F(x(t))\|^2 \leq 0 \; \forall t \in (t^-, t^+)$$

Dunque F decresce lungo le traiettorie. Ne deriva che se $x \in \mathbf{R}^n : \{F(x) \leq c\}$ é limitato per ogni c, allora $\|x(t)\|, t \geq 0$ é limitata e quindi le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi. In effetti si puó dire di piú. Da

$$\int_0^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau = -\int_0^t (F(x(\tau)))' \, d\tau = F(x(0)) - F(x(t)) \leq F(x(0)) - \inf F$$

segue, usando Cauchy-Schwartz

$$\|x(t) - x(s)\| = \| \int_s^t \dot{x}(\tau) d\tau \| \leq \int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\| d\tau \leq |t-s|^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq |t-s|^{\frac{1}{2}} \, (F(x(0)) - \inf F)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall s < t$$

Concludiamo che se F é inferiormente limitata, allora $x(t)$ é uniformemente continua. Come nella dimostrazione della Proposizione 2 concludiamo che $x(t)$ é prolungabile per tutti i tempi positivi.

Proposizione 3: esistenza globale. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Se

$$\exists B, C > 0 : \qquad \|f(x)\| \leq B + C\|x\| \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

allora le soluzioni del sistema differenziale $\dot{x} = f(x)$ sono definite globalmente.

Alla dimostrazione premettiamo un Lemma

Diseguaglianza di Gronwall

Sia $\varphi \in C([0,T), \mathbf{R})$, $\varphi(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,T)$. Se esistono $A, B, C > 0$ tali che

$$\varphi(t) \leq A + Bt + C \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0,T)$$

allora

$$\varphi(t) \leq (A + \frac{B}{C})e^{Ct} - \frac{B}{C} \quad \forall t \in [0,T)$$

Prova. Sia $\psi(t) := A + Bt + C \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$. Si ha:

$\varphi(t) \le \psi(t)$ e $\dot{\psi}(t) = B + C\varphi(t) \le B + C\psi(t)$ per ogni $t \in [0,T)$. Dunque

$$\left(e^{-Ct}\psi(t)\right)' = e^{-Ct}\left(\psi'(t) - C\psi(t)\right) \le Be^{-Ct}$$

Integrando in $[0,t], t \in [0,T)$ otteniamo

$$e^{-Ct}\psi(t) \le \psi(0) - \frac{B}{C}\left(e^{-Ct} - 1\right) = \left(\psi(0) + \frac{B}{C}\right) - \frac{B}{C}e^{-Ct} = \left(A + \frac{B}{C}\right) - \frac{B}{C}e^{-Ct}$$

Siccome $\varphi \le \psi$, moltipicando per e^{Ct} si ottiene la tesi.

PROVA della Proposizione 3. Sia $\gamma'(t) = f(\gamma(t))$ soluzione massimale. Dopo aver integrato tra 0 e t, troviamo

$$\|\gamma(t)\| \le \|\gamma(0)\| + \int_0^t \|f(\gamma(\tau))\| d\tau \le \|\gamma(0)\| + Bt + C\int_0^t \|\gamma(\tau)\| d\tau \quad \forall t < t^+$$

e allora, per il Lemma di Gronwall, $\|\gamma(t)\| \le (\|\gamma(0)\| + \frac{B}{C})e^{Ct}\frac{B}{C}$, $\forall t < t^+$ e quindi $t^+ = +\infty$ in virtú della Proposizione 3.
Per mostrare che é anche $t^- = -\infty$, basta invertire i tempi:
$\beta(t) := \gamma(-t)$ soddisfa $\dot{\beta}(t) = -\dot{\gamma}(-t) = -f(\gamma(-t)) = -f(\beta(t)), \forall t \in (-t^+, -t^-)$ e per quanto appena provato $-t^- = +\infty$.

PROBLEMA DI CAUCHY: Dipendenza continua dai dati iniziali

Sia $f \in Lip\,(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, cioé $\exists L > 0 :\ \|f(x) - f(y)\| \le \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$. Se $\gamma(t), \beta(t),\ t \in [0,T]$ sono soluzioni del sistema differenziale $\dot{x}(t) = f(x(t))$ allora

$$\|\gamma(t) - \beta(t)\| \le \|\gamma(0) - \beta(0)\|e^{Lt} \quad \forall t \in [0,T]$$

PROVA. Ció segue da $\|\gamma(t) - \beta(t)\| \le$

$$\le \|\gamma(0) - \beta(0)\| + \int_0^t \|f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))\| d\tau \le \|\gamma(0) - \beta(0)\| + L\int_0^t \|\gamma(\tau) - \beta(\tau)\| d\tau$$

e dalla diseguaglianza di Gronwall.

NOTA. Si puó provare che : se $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $\dot{x}(t) = f(x(t)), t \in [0,T]$, allora esistono $\delta > 0$ ed $L > 0$ tali che la soluzione del problema di Cauchy $\gamma'(t) = f(\gamma(t)), \gamma(0) = x$ é definita in $[0,T]$ e $\|\gamma(t) - x(t)\| \le \|\gamma(0) - x(0)\|e^{Lt}$ per ogni $t \in [0,T]$, se $\|x - x(0)\| \le \delta$.