Esercitazione AM2 n. 2 - A.A. 2007-2008 - 6/10/07

Serie e successioni di funzioni

Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

1. $f_n(x) = n^p x e^{-nx}$, $p \in \mathbb{R}$.

2. $f_n(x) = \frac{1-e^{-nx}}{1+n}$; studiare se ha senso anche la convergenza delle derivate $g_n(x)$.

3. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$; stabilire se vale il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale in $[0,\ 1]$, ovvero se $lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(3x)^n}$

5. $\sum_{n=2}^{\infty} ne^{-n(x^2+x+1)}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)e^{-nx^2}$.

7. $\sum_{n=2}^{\infty}(x^2-1)^n \log\left(1+\frac{x^2-1}{n}\right)$.

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x+(\log n)^x}$.

Calcolare la somma delle seguenti serie:

9. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

Soluzioni Esercitazione AM2 n. 2 - 11/10/05

1. Per ogni $p \in \mathbb{R}$, la successione converge puntualmente a zero in $[0,+\infty)$ ed uniformemente in $[r,+\infty)$ per ogni $r > 0$. Se $p < 1$ é uniforme su tutto $[0,+\infty)$.

2. La $f_n \to 0$ in $[0,\infty)$ anche uniformemente. Invece $g_n(x) \to \chi_0$ per $x > 0$, da cui la convergenza é uniforme solo in $[a,+\infty)$ per ogni $a > 0$.

3. $f(x) \equiv 0$ e la convergenza é uniforme in $[r,\infty)$ per ogni $r > 0$ per la decrescenza delle f_n. La convergenza non é uniforme in $[0,1]$ perché $\sup_{[0,1]} f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2e}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. In particolare non vale il passaggio al limite s.s.d.i. perché $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 0$.

4. Convergenza puntuale in $(-\infty,-\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3},+\infty)$, convergenza totale in $(-\infty,-a] \cup [a,+\infty)$ con $a > \frac{1}{3}$.

5. Convergenza totale su tutto $\mathbb{R}$ perché $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq ne^{-\frac{3}{4}n}$.

6. Convergenza puntuale ed assoluta per ogni $x \neq 0$. Convergenza totale per $|x| \geq \delta$ per ogni $\delta > 0$.

7. Convergenza puntuale per $x \in (-\sqrt{2},\sqrt{2})$, assoluta per $x \neq 0$. Convergenza totale per $\delta \leq |x| \leq \sqrt{2} - \delta$ per ogni $\delta > 0$.

8. Convergenza puntuale in $(0,\infty)$, assoluta per $x > 1$. Convergenza totale in $[a,+\infty)$ per ogni $a > 1$.

9. Derivare la somma della serie geometrica, moltiplicare tutto per x. Ripetere il procedimento per quatto volte ottenendo $\frac{x(x^3+11x^2+11x+1)}{(1-x)^5}$.

10. La serie, se divisa per x, equivale all 'integrale della somma della serie geometrica di ragione x^2. Quindi la somma é $\frac{1}{2x}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.