Esercitazione AM2 n. 4 e 5 - A.A. 2007-2008 - 12-26/11/07

Estremi liberi e vincolati per funzioni di piú variabili

1. Trovare i massimi e minimi di $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$, $f(x,y) = 4y^4 - 16x^2y + x$, $f(x,y) = \sin(xy)$.

2. Trovare il massimo e minimo di $f(x,y) = xy$ sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

3. Trovare il massimo e minimo di $f(x,y) = x + y$ sull' iperbole $g(x,y) = xy - 1 = 0$ e nel primo quadrante.

4. Determinare gli estremi di $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$ su $C = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$.

5*. Tra tutti i triangoli di perimetro assegnato $2p$ trovare quello di area massima.

6. Trovare il massimo e minimo di $f(x,y,z) = x + 3y - z$ su $D = \{x^2 + y^2 = z\} \cap \{z = 2x^2 + 4y\}$.

Soluzioni Esercitazione AM2 n. 4 e 5 - 12-26/11/07

1. La funzione $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$ ha un punto di sella in $(0,0)$ ed un punto di massimo in $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. La funzione $f(x,y) = 4y^4 - 16x^2y + x$ ha un unico punto critico in $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$ che é una sella. La funzione $f(x,y) = \sin(xy)$ ha come punti critici l'origine e gli iperboli $xy = \frac{\pi}{2} + n\pi$, con $(0,0)$ che é una sella, gli iperboli con n pari sono di massimo e quelli con n dispari sono di minimo.

2. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo quatto punti critici vincolati $(x,y) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ (alla stessa soluzione si perviene parametrizzando la cinconferenza come $(\cos t, \sin t)$). Poiché $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$ mentre $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}$, i primi due sono massimi e gli altri due minimi.

3. Tramite Lagrange otteniamo $\lambda = 1, x = y = -1$ oppure $\lambda = -1, x = y = 1$, ma solo il secondo punto giace nel primo quadrante. Per determinare la natura del punto critico calcoliamo la funzione sull'iperbole ovvero $g(x) = f(x, \frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x}$. Poiché $g''(1) = 2 > 0$, $(1,1)$ é un punto di minimo vincolato.

4. Il minimo della funzione é -1 e viene assunto all'interno ovvero nell'origine. Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si trova che il massimo vale 11 ed é invece assunto sul bordo nei punti $(0, \pm 3)$.

5*. Il triangolo che a paritá di perimetro $2p$ massimizza l'area é quello equilatero. Detti $x, y, z > 0$ le lunghezze dei tre lati del triangolo, alla soluzione $x = y = z$ si perviene tramite la formula di Erone per l'area ovvero $A(x,y,z) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ sia tramite estremizzazione libera di A^2 sia tramite estremizzazione vincolata a $x + y + z = 2p$.

6. Il vincolo é dato dall' intersezione di due vincoli, bisogna quindi studiare la Lagrangiana $F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + 3y - z + \lambda_1(x^2 + y^2 - z) + \lambda_2(z - 2x^2 + 4y)$. Risolvendo il sistema $\nabla F = 0$ si ottengono i punti di massimo e minimo vincolati $M = (1 - \sqrt{\frac{5}{2}}, 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}, 10 - 6\sqrt{\frac{5}{2}})$ e $m = (1 + \sqrt{\frac{5}{2}}, 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}, 10 + 6\sqrt{\frac{5}{2}})$.