Appello B di AM3 - 30/6/2008

1) Calcolare
$$\int_E x^2\, dx\, dy\, dz,$$
ove
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$$
con $a, b, c > 0$.

2) Sia $f(x,y,z) = xy^2z^3$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x,y,z > 0,\ x+y+z = 6\}$. Calcolare l'estremo superiore/inferiore di f su V. Determinare se tali valori estremali sono raggiunti in V e, in caso affermativo, trovare i punti ove vengono raggiunti.

3) Calcolare l'area della frontiera del seguente insieme:
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}.$$

4) Sia $\omega = -\frac{6xy}{(3x^2+y^2)^2}dx + \frac{3x^2-y^2}{(3x^2+y^2)^2}dy$ una $1-$forma differenziale definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Allora:

a) provare che ω è chiusa;

b) calcolare l'integrale di ω sull'ellisse di equazione $3x^2 + y^2 = 1$;

c) dedurre dal punto (b) che ω è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

d) calcolare esplicitamente un potenziale di ω.