Università di Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

AM3 Tutorato 5

A.A. 2007-2008
Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: G. Mancini, D. Piras
Soluzioni del Tutorato 5 del 1 Aprile 2008

Esercizio 1 L'insieme Ω riscritto in forma normale diventa
$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < x < 1\,,\ |x|-1 < y < 1-|x|\,,$
$-\cosh y < z < \cosh y\}$. Quindi otteniamo che

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|-1}^{1-|x|} e^y dy \int_{-\cosh y}^{\cosh y} dz = 2\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|-1}^{1-|x|} e^y \cosh y\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{|x|-1}^{1-|x|} e^y(e^y + e^{-y})dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{|x|-1}^{1-|x|} e^{2y} + 1dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \left[\frac{e^2y}{2} + y\right]_{|x|-1}^{1-|x|} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dxe^{2-2|x|} - e^{2|x|-2} + 4\int_{0}^{1} 1 - xdx =$$

$$= 2 + \int_{0}^{1} dxe^{2-2x} - e^{2x-2} = 2 - \left(\frac{e^{2-2x}}{2} + \frac{e^{2x-2}}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} = 2 - 1 + \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^{-2}}{2}\right) =$$

$$= 1 + \cosh(2)$$

Esercizio 2 Scritto in forma normale l'insieme C diventa
$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 1\,,\ -\sqrt{(y-1)^2 - x^2} < z < \sqrt{(y-1)^2 - x^2}\,,$
$y-1 < x < 1-y\}$. Si ha quindi che

$$\int_C \sqrt{(y-1)^2 - x^2}\, dxdydz = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} dx \int_0^{\sqrt{(y-1)^2-x^2}} 2\sqrt{(y-1)^2 - x^2} dz =$$

$$= 2\int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} (y-1)^2 - x^2\, dx = 2\int_0^1 dy\ x(y-1)^2 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{y-1}^{1-y} =$$

$$= 2\int_0^1 dy(1-y)(y-1)^2 - \frac{(1-y)^3}{3} - (y-1)(y-1)^2 + \frac{(y-1)^3}{3} =$$

$$= 4\int_0^1 dy(1-y)^3 - \frac{(1-y)^3}{3} = \frac{8}{3}\int_0^1 dy(1-y)^3 = -\frac{2(1-y)^4}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Esercizio 3 L'insieme D è già scritto in forma normale. Dunque abbiamo che

$$\int_D (1-\cos x)\cos(x-y)\, dxdy = \int_0^{\pi} 1 - \cos x\, dx \int_{\sin x}^{x} \cos(x-y) dy =$$

$$= \int_0^\pi (1 - \cos x\, dx) - \sin(x-y)|_{\sin x}^{x} =$$

$$= \int_0^\pi (1-\cos x)\sin(x - \sin x)\, dx \overset{t = x - \sin x}{=} \int_0^\pi \sin(t)\, dt = 2$$

Esercizio 4 Possiamo osservare che riscrivendo l'integrale nella forma

$$\int_D y^2 + x^2 y\, dxdy = \int_D y^2, dxdy + \int_D x^2 y\, dxdy$$

Il primo addendo è l'integrale di una funzione pari nelle y ed il secondo è l'integrale di una funzione dispari nelle y su un insieme simmetrico, quindi possiamo riscrivere

$$\int_D y^2\, dxdy + \int_D x^2 y\, dxdy = 2\int_{\tilde{D}} y^2, dxdy$$

Dove $\tilde{D}$ è l'insieme $\tilde{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\,,\; x < y < \sqrt{2x - x^2}\}$. Allora

$$\int_D y^2 + x^2 y\, dxdy = 2\int_{\tilde{D}} y^2\, dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} y^2\, dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 dx\, (+1 - 1 + 2x - x^2)^{\frac{3}{2}} - x^3 = -\frac{1}{12}x^4\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\sqrt{1 - (1-x)^2}\right)^3 dx =$$

$$\overset{\cos t = 1 - x}{=} -\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\, dt = -\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\pi$$

Esercizio 5 L'insieme Ω è già scritto in forma normale, inoltre seguendo il suggerimento scriviamo

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^1 \frac{dx}{\cos^2 x}\int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{1 + \tan^2 y}{2\tan y} dy = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^1 \frac{dx}{\cos^2 x}\log(\tan y)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^1 \frac{\log\tan x}{\cos^2 x} dx \overset{t = \tan x}{=} \frac{1}{2}\int_1^{\tan 1} \log t\, dt = \frac{1}{2}(t\log t - t)\,|_1^{\tan 1} =$$

$$= \frac{1}{2}(\tan 1 \log\tan 1 - \tan 1 + 1)$$

Esercizio 6 L'insieme $\aleph$ è scritto "quasi" in forma normale, dobbiamo solo capire dove variano le x. Tuttavia mettendo a sistema le due condizioni otteniamo che $-1 < x < 1$, dunque:

$$\int_\aleph \frac{e^{e^x + x}}{(3+z)^2(3-y)^2}\, dxdydz = \int_0^1 dx e^{e^x + x}\int_0^{4 - x^2} \frac{dz}{(3+z)^2}\int_0^{1-x^2} \frac{dy}{(3-y)^2}$$

Tuttavia si ha che

$$\int_0^{1-x^2} \frac{dy}{(3-y)^2} = +\infty$$

Dunque

$$\int_\aleph \frac{e^{e^x + x}}{(3+z)^2(3-y)^2}\, dxdydz = +\infty$$

Esercizio 7 L'insieme Ω in forma normale si scive come
$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < \pi\,,$
$-\sin z < x < \sin z\,,\ -\sqrt{\sin^2 z - x^2} < y < \sqrt{\sin^2 z - x^2}\}$. Dunque

$$Vol(\Omega) = \int_0^\pi dz \int_{-\sin z}^{\sin z} dx \int_{-\sqrt{\sin^2 z - x^2}}^{\sqrt{\sin^2 z - x^2}} dy =$$

$$= 2\int_0^\pi dz \int_{-\sin z}^{\sin z} \sqrt{\sin^2 z - x^2}\, dx \overset{x=\sin z \sin t}{=}$$

$$= 2\int_0^\pi dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 z - (\sin z \sin t)^2}\ \sin z \cos t\, dt =$$

$$= 2\int_0^\pi dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 z \cos^2 t\, dt = 2\left(\int_0^\pi \sin^2 z dz\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt\right) = 2\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Esercizio 8 L'insieme S si può scrivere in forma normale come
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < x < 1\,,\ -\sqrt{1 - x^2} < y < \sqrt{1 - x^2}\,,$
$-\sqrt{1 - x^2 - y^2} < z < \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$. Inoltre possiamo notare che

$$\sin(x + y + z) = \sin x \cos(y + z) + \cos x \sin(y + z)$$

Allora abbiamo che

$$\int_S \sin(x + y + z) dxdydz =$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{-\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \sin x \cos(y + z) + \cos x \sin(y + z) =$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{-\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \cos x \sin(y + z)$$

Questo perchè stiamo integrando $\sin x$ nell'intervallo $(-1, 1)$, quindi tutto il primo addendo da contributo nullo. Inoltre

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \cos x \sin(y + z) =$$

$$= \int_{-1}^1 dx \cos x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \sin y \cos z + \cos y \sin z = 0$$

Perchè stiamo ancora integrando $\sin y$ e $\sin z$ su intervalli simmetrici.

Esercizio 9 Scriviamo l'insieme D in forma normale. Si ha
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2 - x^2 - y^2} > z > x^2 + y^2\,,\ |y| < \sqrt{1 - x^2}\,,$
$-1 < x < 1\}$. Dunque

$$\int_D \frac{\sqrt{1 - x^2}(1 + y^2)}{\sqrt{2 - (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)}} dxdydz =$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \frac{\sqrt{1 - x^2}(1 + y^2)}{\sqrt{2 - (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)}}$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \sqrt{1-x^2}(1+y^2) = 4\int_0^1 dx \sqrt{1-x^2}\left(y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 4\int_0^1 1 - x^2 + \frac{(1-x^2)^2}{3} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\left(1 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{152}{45}$$

Esercizio 10 L'insieme Ω è già scritto in forma normale, quindi abbiamo che

$$\int_\Omega e^{x+z}\, dxdydzdw = \int_0^1 dw \int_0^w dx \int_0^{-x+w} dy \int_0^{x+y+w} e^{z+x} dz =$$

$$= \int_0^1 dw \int_0^w dx \int_0^{-x+w} dy e^{2x+y+w} - e^x = \int_0^1 dw \int_0^w dx\; e^{2x+y+w} - ye^x\Big|_0^{-x+w} =$$

$$= \int_0^1 dw \int_0^w dx e^{x+2w} - (w-x)e^x - e^{2x+w} =$$

$$= \int_0^1 dw \int_0^w dx e^{x+2w} - we^x + xe^x - e^{2x+w} =$$

$$= \int_0^1 dw \left(e^{x+2w} - we^x - \frac{e^{2x+w}}{2} + xe^x\right)\Bigg|_0^w - \int_0^w e^x =$$

$$= \int_0^1 dw e^{3w} - we^w - \frac{e^{3w}}{2} + we^w - e^{2w} + w - \frac{e^w}{2} - e^w + 1 =$$

$$= \int_0^1 dw \frac{e^{3w}}{2} - e^{2w} - \frac{e^w}{2} + w + 1 =$$

$$= \frac{e^{3w}}{6} - \frac{e^{2w}}{2} - \frac{e^w}{2} + \frac{w^2}{2} + w\Bigg|_0^1 = \frac{e^3}{6} - \frac{e^2}{2} - \frac{e}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= \frac{e^3}{6} - \frac{e^2}{2} - \frac{e}{2} + \frac{7}{3}$$