

AM5 2008: Tracce delle lezioni- 3

CONVERGENZA QUASI OVUNQUE, IN MISURA, IN MEDIA

Siano f_n, f funzioni misurabili in (X, Σ, μ) . Diremo che f_n converge a f

quasi ovunque (q.o.) se $\exists N \in \Sigma : \mu(N) = 0$ e $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \notin N$

in misura se $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \rightarrow_n 0 \quad \forall \epsilon > 0$

in media se f_n, f sono sommabili e $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow_n 0$.

Nota. Unicit  del limite: se f_n converge a f e a g q.o. (oppure in misura, oppure in media) allora $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \neq 0\}) = 0$, (si dice $f = g$ q.o.)

Proposizione 1

(i) $f_n \rightarrow f$ in media $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ in misura

(ii) $f_n \rightarrow f$ q.o. $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ in misura sugli insiemi di misura finita

(iii) $f_n \rightarrow f$ in misura $\Rightarrow \exists n_k : f_{n_k} \rightarrow f$ quasi ovunque

Prova.

(i) Segue da: $\int |f_n - f| \geq \epsilon \mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\})$

(ii) Sia $g_n := |f_n - f|$.   $\{x \in A : g_n \rightarrow 0\} = \bigcap_j \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} \{x \in A : g_k \leq \frac{1}{j}\}$. Quindi, $g_n \rightarrow 0$ q.o. in $A \Leftrightarrow \mu(\bigcup_j \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} \{x \in A : g_k > \frac{1}{j}\}) = 0$. Quindi, se $g_n \rightarrow 0$ q.o. in A ed A   di misura finita, allora $\mu(\bigcup_{k \geq n} \{x \in A : g_k > \frac{1}{j}\}) \rightarrow_n 0$ per ogni j e quindi $f_n \rightarrow_n 0$ in misura su A .

(iii) Se $f_n \rightarrow_n 0$ in misura,   vero che $\forall j, \exists n_j : \mu(\{g_n \geq \frac{1}{j}\}) \leq \frac{1}{2^j}, \forall n \geq n_j$. Siccome $\bigcup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}$   una successione decrescente di insiemi con $\mu(\bigcup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}) \leq \sum_{j \geq k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}$, risulta $\mu(\bigcap_k \bigcup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}) = 0$. Ma

$$x \notin \bigcap_k \bigcup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\} \Rightarrow \exists k : j \geq k \Rightarrow g_{n_j}(x) < \frac{1}{j}$$

e quindi $g_{n_j}(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \notin \bigcap_k \bigcup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}$.

Nota. Unicit  del limite: dalla Prop. segue che se f_n converge a f q.o., od, indifferentemente, in misura od in media, ed f_n converge a g q.o., od, indifferentemente, in misura od in media, allora $f = g$ q.o.

CONTROESEMPI

(i) La convergenza in misura (cos  come la convergenza q.o.) non implica la convergenza in media: $X = \mathbf{R}$ con la misura di Lebesgue e $f_n = n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$; f_n converge a zero in misura (e puntualmente), ma $\int_{\mathbf{R}} f_n = 1$.

(ii) La convergenza in misura non implica la convergenza q.o.: $f_{n,k} = \chi_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}$, ove, dato $n \in \mathbf{N}$, k va da 1 fino ad n , converge a zero in misura ma non converge in alcun punto (in ogni punto il massimo limite   1 ed il minimo limite   zero).

(iii) La convergenza puntuale non implica la convergenza in misura: $f_n = \chi_{[n, n+1]}$ converge a zero puntualmente (e, sugli intervalli limitati, anche in misura), ma non converge in misura su tutto \mathbf{R} .

Teorema 1 (Lebesgue) *Siano f_n sommabili. Se f_n   equidominata, esiste cio  g sommabile tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ quasi per ogni x f_n converge ad f q.o., oppure in misura allora f   sommabile ed f_n converge a f in media.*

Prova. Se f_n converge ad f q.o., esiste N tale che $\mu(N) = 0$, $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \forall x \notin N$ e $|f_n(x) - f(x)| \leq 2g(x) \quad \forall x \notin N$. E ci  assicura che $\int |f_n(x) - f(x)| = \int |f_n(x) - f(x)|\chi_{N^c} \rightarrow 0$.

Se invece f_n converge ad f in misura, una sua sottosuccessione converge anche q.o. e quindi in media. Se f_n non convergesse in media a f , esisterebbero n_k ed $\epsilon > 0$ tali che $\int |f_{n_k} - f| \geq \epsilon$, mentre anche f_{n_k} al pari di f dovrebbe avere una sottosuccessione convergente a f in media.

CONVERGENZA IN MISURA E TEOREMA DI VITALI

Abbiamo visto che se f   sommabile, allora

$$(i) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad E \in \Sigma, \quad \mu(E) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \int_E |f| \leq \epsilon$$

$$(ii) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists E_\epsilon \in \Sigma : \quad \mu(E_\epsilon) < \infty \quad \text{e} \quad \int_{E_\epsilon^c} |f| \leq \epsilon$$

Se $\int |f_n - f| \rightarrow 0$, le proprietà (i)-(ii) valgono (banalmente) **uniformemente** in n :

$$(k) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad E \in \Sigma, \quad \mu(E) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int_E |f_n| \leq \epsilon$$

$$(kk) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists E_\epsilon \in \Sigma : \quad \mu(E_\epsilon) < \infty \quad \text{e} \quad \sup_n \int_{E_\epsilon^c} |f_n| \leq \epsilon$$

Infatti,

$$\int_E |f_n| \leq \int |f_n - f| + \int_E |f| \leq 2\epsilon \quad \text{se} \quad n \geq n_\epsilon \quad \text{e} \quad \mu(E) \leq \delta_{\epsilon, f}$$

mentre $\int_E |f_j| \leq \epsilon$ per $j = 1, \dots, n_\epsilon$ se $\mu(E) \leq \delta_{\epsilon, f_1, \dots, f_{n_\epsilon}}$.

Analogamente, se $\int_{E_\epsilon^c} |f| \leq \frac{\epsilon}{2}$ allora

$$\int_{E_\epsilon^c} |f_n| \leq \int_{E_\epsilon^c} |f_n - f| + \int_{E_\epsilon^c} |f| \leq \epsilon \quad \text{se} \quad n \geq n_\epsilon$$

mentre $\int_{E_{j,\epsilon}^c} |f_j| \leq \epsilon$ per $j = 1, \dots, n_\epsilon$ per certi $E_{j,\epsilon}$ di misura finita e quindi, posto $F_\epsilon = E_\epsilon \cup_j E_{j,\epsilon}$ risulta $\int_{F_\epsilon^c} |f_n| \leq \epsilon$.

TEOREMA DI CONVERGENZA DI VITALI .

Siano f_n sommabili e convergenti in misura ad f . Se valgono (k) e (kk), allora f é sommabile e $\int |f_n - f| \rightarrow 0$.

Prova. Dalla Prop. 1-(ii) e dal Lemma di Fatou segue che:

$$\exists f_{n_k} \rightarrow_k f \text{ q.o.} \quad \text{e quindi} \quad \int_E |f| \leq \underline{\lim} \int_E |f_{n_k}| \leq \sup_n \int_E |f_n| \quad \forall E \in \Sigma . \quad \text{Se}$$

δ_ϵ , E_ϵ sono come in (k)-(kk) e $A_{\epsilon,n} := \{x \in A_\epsilon : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{\mu(A_\epsilon)}\}$ per cui

$\mu(A_{\epsilon,n}) \leq \delta_\epsilon$ se $n \geq n_\epsilon$ ($f_n \rightarrow f$ in misura!) vediamo che f é sommabile, perché

$$\int |f| \leq \int_{A_\epsilon^c \cup A_{\epsilon,n}} |f| + \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} |f - f_n| + \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} |f_n| \leq 3\epsilon + \int_{A_\epsilon} |f_n| \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

e, infine, $n \geq n_\epsilon \Rightarrow$

$$\int |f_n - f| = \int_{A_\epsilon^c \cup A_{\epsilon,n}} |f_n - f| + \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} |f_n - f| \leq 4\epsilon + \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} \frac{\epsilon}{\mu(A_\epsilon)} = 5\epsilon$$

NOTA. Nel Teorema di Vitali l'ipotesi ' f_n converge a f in misura' puó essere sostituita dalla ' f_n converge a f q.o.', giacché la convergenza q.o. implica la convergenza in misura sull'insieme di misura finita A_ϵ .

COMPLETEZZA

Una successione di funzioni sommabili f_n soddisfa la condizione di Cauchy per la convergenza in media se

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon : \quad n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \int |f_n - f_m| \leq \epsilon \quad (C)$$

Se f_n converge in media, f_n é necessariamente di Cauchy (i.e. soddisfa (C)). Viceversa, se f_n soddisfa (C), allora f_n converge in media a una funzione sommabile f :

Teorema *Se f_n é una successione di funzioni sommabili, allora f_n converge in media se e solo se soddisfa la condizione di Cauchy (C).*

Dimostrazione. La necessitá é ovvia; proviamo la sufficienza. Da (C):

$$\exists n_k : \quad \int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq \frac{1}{2^k}$$

Posto $g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$, dal Teorema di B. Levi otteniamo

$$\int \left[\sum_k |g_k| \right] d\mu = \sum_k \left[\int |g_k| d\mu \right] = \sum_k \frac{1}{2^k} < +\infty \quad \text{cioé}$$

$$g := \sum_k |g_k| \quad \text{é sommabile e quindi finita q.o.,} \quad \text{e quindi}$$

la serie $\sum_k g_k$ converge q.o., ovvero $f(x) := \lim f_{n_k}$ esiste q.o. Inoltre,

$$|f_{n_k}| \leq |f_1| + g \quad \text{e quindi} \quad \int |f_{n_k} - f| \rightarrow 0 \quad (\text{convergenza dominata})$$

$$\text{Da (C):} \quad \int |f_n - f| \leq \int |f_n - f_{n_k}| + \int |f_{n_k} - f| \leq \epsilon \quad \text{se} \quad n, n_k \geq n_\epsilon$$

NOTA. Dalla dimostrazione:

f_n di Cauchy $\Rightarrow \exists f_{n_k}$ equidominata e convergente quasi ovunque.

Definizione di $L^1(\mu)$. $L^1(\mu) = \{[f] : \int |f| < \infty\}$, $[f] := \{g : g = f \text{ q.o.}\}$

Possiamo riformulare i fatti mostrati dicendo che

$$\rightarrow \quad \|f\| := \int |f| \quad \text{é una norma su} \quad L^1(\mu)$$

$$\rightarrow \quad (L^1, \|f\|) \quad \text{é uno spazio di Banach}$$

SPAZI L^p

Sia μ misura su X , $p \geq 1$.

$$L^p = L^p(X, \mu) := \{f : X \rightarrow [-\infty, +\infty] \mid f \text{ é misurabile e } \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$$

Siccome $p \geq 1 \Rightarrow (\frac{|t|+|s|}{2})^p \leq \frac{|s|^p+|t|^p}{2} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, \quad \acute{e}$

$$f, g \in L^p \quad \Rightarrow \quad f + g \in L^p$$

e quindi, facilmente, L^p **é spazio vettoriale**. Nel seguito, non distingueremo L^p da L^p quozientato rispetto al sottospazio $N := \{f = 0 \text{ q.o.}\}$.

→ Se $X = \mathbf{N}$ e μ é la misura che conta, $l^p := L^p(X, \mu)$ é lo spazio delle successioni $a := (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di potenza p -esima sommabile con norma $\|a\| = [\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p]^{\frac{1}{p}}$

DISEGUAGLIANZE di HOLDER, di MINKOWSKII .

Siano f, g misurabili. Se $p \geq 1$, allora

$$\left(\int |f + g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Minkowskii)}$$

Se $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (i.e. p, q sono 'esponenti coniugati'), allora

$$\int |f g| \leq \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{(Holder)}$$

Una elementare disuguaglianza di convessità.

$$p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad s t \leq \frac{t^p}{p} + \frac{s^q}{q} \quad \forall s, t \geq 0$$

Da $\frac{d}{dr}(\frac{r^p}{p} - r + \frac{1}{q}) = r^{p-1} - 1$ segue che $r = 1$ é punto di minimo assoluto.

Da $\frac{r^p}{p} - r + \frac{1}{q} = 0$ in $r = 1$, segue $r \leq \frac{1}{p}r^p + \frac{1}{q} \quad \forall r > 0$. Scrivendo (se $s \neq 0$) $r = \frac{t}{s^{q-1}}$ si ottiene la disuguaglianza voluta.

Adesso Holder segue subito scrivendo $t = \frac{|f(x)|}{(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}}$, $s = \frac{|g(x)|}{(\int |g|^q)^{\frac{1}{q}}}$ e integrando.

Minkowskii segue da Holder:

$$\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1 \quad \Rightarrow \quad |f + g|^p \leq |f + g|^{p-1} |f| + |f + g|^{p-1} |g|$$

$$\Rightarrow \int |f + g|^p \leq \left(\int |f + g|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |f + g|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

COMPLETEZZA degli spazi L^p . Sia $p \geq 1$.

(i) $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$ é una norma su L^p .

(ii) L^p dotato di tale norma é uno **spazio di Banach**, ovvero

$$f_n \in L^p, \|f_n - f_m\|_p \rightarrow_{n, m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \exists f \in L^p : \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$$

Si prova esattamente come nel caso $p = 1$: sia $g_k := f_{n_k}$ tale che $\|g_{k+1} - g_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$. Posto $F_n := \sum_1^n |g_{k+1} - g_k|$, é $\|F_n\|_p \leq \sum_1^n \frac{1}{2^k} \leq 1 \quad \forall n$ e quindi $F(x) := \lim_n F_n$ é in L^p per il Teorema di Levi, e quindi

$$\sum_1^\infty |g_{k+1} - g_k| < +\infty \quad \text{q.o.}$$

$$f(x) := \lim_k [g_1 + (g_2 - g_1) + \dots + (g_k - g_{k-1})] = \lim_k f_{n_k} \quad \text{esiste finito q.o.}$$

Inoltre $|f_{n_k}| \leq F + |g_1|$ e quindi $|f_{n_k}|^p$ é equidominata e quindi $\int |f_{n_k} - f|^p \rightarrow 0$.

Infine, essendo f_n di Cauchy in L^p , $\int |f_n - f|^p \rightarrow 0$.

DISEGUAGLIANZA di INTERPOLAZIONE .

Siano $1 \leq p \leq q$, $\theta \in [0, 1]$ tale che $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$. Allora

$$f \in L^p \cap L^q \Rightarrow f \in L^r \quad \forall r \in [p, q] \quad \text{e} \quad \|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$$

Infatti, $\frac{p}{\theta r}$ e $\frac{q}{(1-\theta)r}$ sono esponenti coniugati e quindi

$$\int |f|^r = \int |f|^{r\theta} |f|^{r(1-\theta)} \leq \left(\int |f|^p \right)^{\frac{r\theta}{p}} \left(\int |f|^q \right)^{\frac{r(1-\theta)}{q}}$$

DISEGUAGLIANZA di HOLDER GENERALIZZATA .

Siano $f \in L^p, g \in L^q$. Allora

$$\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 \Rightarrow \|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Basta applicare Holder con esponenti $\frac{p}{r}$ e $\frac{q}{r}$:

$$\int |f|^r |g|^r \leq \left(\int |f|^p \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int |g|^q \right)^{\frac{r}{q}}$$

Esercizi e complementi 3

Teorema di Egoroff. Sia $\mu(X) < \infty$. Siano f_n misurabili. Allora,

$f_n(x) \rightarrow 0 \forall x \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon$ misurabile : $\mu(A_\epsilon) \leq \epsilon$ e $f_n \rightarrow 0$ uniformemente in $A \setminus A_\epsilon$

Suggerimento. Provare che $\forall j, \epsilon, \exists n(\epsilon, j) : \mu(\cup_{n \geq n(\epsilon, j)} \{g_n \geq \frac{1}{j}\}) \leq \frac{\epsilon}{2^j}$ e considerare $A_\epsilon := \cup_j \cup_{n \geq n(\epsilon, j)} \{g_n \geq \frac{1}{j}\}$

Convergenza in misura, q.o., in media

Esercizio 1. Sia $f_n(x) := |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n}$, $x \in (0, 2\pi)$, $k_n \in \mathbf{N}$, $p_n \rightarrow +\infty$.
Provare che f_n converge a zero in misura.

Sugg. Confrontare $L^1(\{x : |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n} \geq \epsilon\})$ con $L^1(\{x : |\sin x|^{p_n} \geq \epsilon\})$

Esercizio 2. Discutere convergenza puntuale, uniforme, in media, in misura per

$$(i) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in (0, 1), \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in (1, +\infty)$$

$$(ii) f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad x \in (0, 1), \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad x \in (1, +\infty)$$

$$(iii) f_n(x) = \frac{n^2x^2}{n^4+x^2}, \quad x \in (1, +\infty)$$

$$(iv) f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^4)\log(n+1)}$$

Esercizio 3. Siano f_n, g misurabili in \mathbf{R} , $|f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi tutti gli x .
Provare che $L^1(\{g \geq \epsilon\}) < \infty \quad \forall \epsilon > 0, \quad f_n \rightarrow 0 \text{ q.o.} \Rightarrow f_n \rightarrow 0$ in misura

Suggerimento. $L^1(\{|f_n| \geq \epsilon\}) \leq L^1(\{|g(x)| \geq \epsilon\}) \dots$

Esercizio 4. Sia $\Phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q} \cap [0, 1]$ biiezione. Siano

$$\Phi(k) = \frac{m_k}{n_k}, \quad m_k, n_k \quad \text{primi tra loro} \quad f_k(x) = e^{-(m_k - n_k x)^2}, \quad x \in [0, 1]$$

Provare che f_k tende a zero in misura, mentre $\lim f_k(x)$ non esiste per alcun x .

Suggerimento. Trovare le x che soddisfano la diseguaglianza $(m_k - n_k x)^2 \leq \log \frac{1}{\epsilon}$.
Usare poi il fatto che per ogni x esistono razionali m_k, n_k tali che $|x - \frac{m_k}{n_k}| \leq \frac{1}{n_k^2}$.

Considerare a parte il caso x razionale.

Esercizio 5. (i) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \rightarrow 0$ in misura ma $\int |f_n| \geq 1$

(ii) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \rightarrow 0$ q.o. ma $\int |f_n| \geq 1$

(iii) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \rightarrow 0$ q.o. ma non in misura

(iv) Trovare $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ tali che $f_n(x) \rightarrow 0 \forall x$ ma non in misura

Suggerimento. $f_n = \chi_{\cup_{j \geq n} (Z + q_j)} \dots$

Esercizio 6. Sia $\mu(X) < \infty$. Siano $f_n \geq 0$ funzioni sommabili. Provare che

$$\sup_n \int f_n < +\infty, \quad f_n \rightarrow f \text{ q.o.}, \quad \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$$

Suggerimento: $A_{n,\epsilon} := \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \Rightarrow$
 $\int |f_n - f| \leq \int_{A_{n,\epsilon}} |f_n - f| + \epsilon\mu(X), \quad \circ(1) - \epsilon\mu(X) \leq \int_{A_{n,\epsilon}} f_n \leq \circ(1) + \epsilon\mu(X)$

Spazi L^p

Esercizio 1. Siano $p_i > 1$, $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p} \leq 1$. Siano f_1, \dots, f_l misurabili. Provare che

$$\left(\int |f_1 \dots f_l|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f_1|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \dots \left(\int |f_l|^{p_l} \right)^{\frac{1}{p_l}}$$

Esercizio 2. Data f Lebesgue misurabile in \mathbf{R}^n , $t > 0$, sia $f_t(x) = f(tx)$. Provare che

(i) f_t è misurabile, (ii) $f \in L^p \Rightarrow f_t \in L^p$ e $\|f_t\|_p = t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_p$

Esercizio 3. Siano $f_n \in L^p(X)$ tali che $\sup_n \int_X |f_n|^p < +\infty$. Provare che

$\liminf |f_n| \in L^p$, mentre può accadere che $\int \limsup |f_n| = +\infty$.

Esercizio 4. Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $1 \leq s < t$. Provare che

(i) $f \in L^t \Rightarrow f \in L^s$, e l'inclusione $L^t \subset L^s$ è stretta

(ii) l'inclusione $L^t \subset L^s$ è falsa se $\mu(X) = +\infty$.

Esercizio 5. Sia f_n successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^n)$, $p \geq 1$. Provare che

$$f_n \rightarrow f \quad q.o., \quad \int |f_n|^p \rightarrow \int |f|^p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$$

Convergenza in media, q.o., in misura: cenni di soluzione

Esercizio 6. Sia $I := \int f$, $A_{n,\epsilon} := \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$. Intanto

$$\mu(X) < \infty, f_n \rightarrow f \quad q.o. \quad \Rightarrow \quad f_n \rightarrow f \quad \text{in misura} \quad \Rightarrow \quad \mu(A_{n,\epsilon}) \rightarrow_n 0$$

Quindi $\int_{A_{n,\epsilon}} f \rightarrow_n 0$ (assoluta continuità dell'integrale) e quindi

$$\begin{aligned} \int |f_n - f| &\leq \int_{A_{n,\epsilon}} |f_n - f| + \epsilon \mu(X) \leq 2\epsilon \mu(X) + \int_{A_{n,\epsilon}} f_n \quad \forall n \geq n_\epsilon. \quad \text{Ma} \quad \int_{A_{n,\epsilon}} f_n = \\ &= I + o(1) - \int_{A_{n,\epsilon}^c} f_n \leq I + o(1) - \int_{A_{n,\epsilon}^c} (f - \epsilon) \leq \epsilon \mu(X) + \int_{A_{n,\epsilon}} f \leq 2\epsilon \mu(X) \quad \forall n \geq n_\epsilon \end{aligned}$$

Esercizi sugli L^p : cenni di soluzione

Esercizio 2. Se E é misurabile, allora $A \subset tE, \quad B \subset tE^c \quad \Rightarrow$

$$\frac{1}{t}A \subset E, \quad \frac{1}{t}B \subset E^c \quad \Rightarrow \quad \mu(A \cup B) = t^n \mu\left(\frac{1}{t}A \cup \frac{1}{t}B\right) = t^n [\mu\left(\frac{1}{t}A\right) + \mu\left(\frac{1}{t}B\right)] = \mu(A) + \mu(B)$$

e quindi tE é misurabile.

Se E é misurabile, $\chi_E(tx) = \chi_{\frac{1}{t}E}$ é misurabile e $\int \chi_E(tx) d\mu(x) = \mu\left(\frac{1}{t}E\right) = \left(\frac{1}{t}\right)^n \mu(E) = t^{-n} \int \chi_E$.

Se $0 \leq f$ é misurabile e $0 \leq \varphi_j \leq \varphi_{j+1} \leq f$, allora

$$\int f^p(tx) d\mu(x) = \lim_j \int \varphi_j^p(tx) d\mu(x) = t^{-n} \int f^p$$

Esercizio 6. Proviamo intanto che dal Lemma di Fatou segue che

$$f_n \rightarrow f \quad q.o., \quad \int |f_n|^p \rightarrow \int |f|^p \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim}_n \int_E |f_n|^p \leq \int_E |f|^p \quad \forall E \quad \text{misurabile}$$

Infatti

$$\int |f|^p - \overline{\lim}_n \int_E |f_n|^p = \lim_{\underline{n}} [\int |f_n|^p - \int_E |f_n|^p] \geq \int_{E^c} |f|^p \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim}_n \int_E |f_n|^p \leq \int_E |f|^p$$

Ciò implica l'uniforme assoluta continuità degli integrali:

$$\mu(E) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int_E |f_n|^p \leq \epsilon, \quad \exists E_\epsilon \text{ con } \mu(E_\epsilon) < +\infty : \quad \sup_n \int_{E_\epsilon^c} |f_n|^p \leq \epsilon$$

Siamo quindi nelle ipotesi del Teorema di Vitali, e quindi $\|f_n - f\|_p \rightarrow_n 0$.