

FM2 , A.A. 2007/08, Esame 16 Gennaio

Esercizio 1 (8 punti) Trovare, se esiste, la soluzione di

$$x^2 u_x - xy u_y + y = 0$$

tale che $u = 2s^2$ sulla curva γ di equazione parametriche $x = s, y = s$, con $1 \leq s \leq 2$. Per quali valori di x e y la soluzione é definita ?

Esercizio 2 (8 punti) Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + e^{-t} \cos \frac{1}{2} \pi x & 0 < x < 1 & \quad 0 < t \\ u(x, 0) &= 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, & u(1, t) &= 1. \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Si determini il $\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} u(t, x)$.

Esercizio 3 (9 punti) Determinare la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= \sin \pi x & (x, y) &\in (0, 1) \times (0, 2); \\ u(x, 0) &= 1, \quad u(x, 2) = 0 & x &\in [0, 1], \\ u(0, y) &= 0, \quad u(1, y) = 0 & y &\in [0, 2]. \end{aligned}$$

Sia $G(x, y)$ la funzione di Green nel rettangolo $(0, 1) \times (0, 2)$ con condizioni di Dirichlet nulle sul bordo del rettangolo. Si rappresenti usando la funzione di Green la soluzione del problema.

Esercizio 4 (5 punti)

Determinare per quali valori di x e y la seguente equazione é parabolica, ellittica o iperbolica:

$$y u_{xx} - x u_{yy} + u_x + x u_y = 0.$$

Ridurla inoltre a forma canonica quando $x > 1, y > 1$.