Esecitazione FM2-A.A. 2007-2008- 06 /12/06

Formula di D'Alembert, Equazione delle onde

1. (CORDA SEMIINFINITA CON ESTREMO FISSO)
   Consideriamo:
   $$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x),\ \ u_t(x,0) = h(x) & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$
   con g ed h regolari, $g(0) = 0$. Dopo aver esteso opportunamente i dati iniziali a tutto $\mathbb{R}$, usare la formula di D'Alembert per rappresentare la soluzione come sovrapposizione di onde progressive.

2. Consideriamo:
   $$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x),\ \ u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq L \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$
   con g regolare, $g(0) = 0$. Definendo opportunamente il dato iniziale g al di fuori dell'intervallo $[0, L]$, utilizzare la formula di D'Alembert per rappesentare la soluzione.

3. Sia dato il problema:
   $$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x),\ \ u_t(x,0) = h(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = 0,\ \ u(L,t) = B. & t \geq 0 \end{cases}$$
   (a) Determinare la soluzione stazionaria u_0 del problema.
   (b) Trovare un'espressione formale per la soluzione u.
   (c) Verificare che per $t \to +\infty$, u non tende a u_0. In quali casi la soluzione tende a quella stazionaria?

4. (VIBRAZIONI FORZATE)
   Sia dato il problema
   $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) & 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

(a) Utilizzando il metodo di separazione delle variabili scrivere un'espressione formale per la soluzione del problema.

(b) Risolvere il caso $f(x,t) = g(t)\sin(\frac{\pi x}{L})$.

5. (LAVOR A CASA)
Risolvere il problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & 0 < x < L, \ \ t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

nei casi $f(x,t) = e^{-t}\sin(\frac{\pi x}{L})$, $f(x,t) = xe^{-t}$.