

FISICA MATEMATICA (FM2), A.A. 2007/08
Primo Esonero (9/11/07)

Esercizio 1 (10 punti) Verificare l'esistenza e determinare la soluzione

$$\begin{aligned}uu_x + (y + 1)u_y &= x \\u(x, 1) &= \frac{1}{2}x.\end{aligned}$$

Esercizio 2 (7 punti) Verificare l'esistenza e determinare la soluzione

$$\begin{aligned}(x + 1)u_x + yu_y &= u \\u(1, y) &= y.\end{aligned}$$

Esercizio 3 (8 punti) Sia $u(x, t)$ soluzione continua in $[0, \pi] \times [0, +\infty)$ del problema

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= \sin \frac{x}{2} & x \in (0, \pi), & t > 0 \\u(0, x) &= \sin \frac{3}{2}x, & x \in [0, \pi]; & u(t, \pi) = 1, & u(t, 0) = 0.\end{aligned}$$

La soluzione u é non negativa? Risolvere

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= \sin \frac{x}{2} & x \in (0, \pi), & t > 0 \\u(0, x) &= \sin \frac{3}{2}x, & x \in [0, \pi]; & u_x(t, \pi) = 1, & u(t, 0) = 0.\end{aligned}$$

con il metodo di separazione delle variabili.

Esercizio 4 (5 punti) Si determini la soluzione $u(x, t)$ di

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + e^{-x^2} \cos t \\u(0, x) &= x, & -L \leq x \leq L & u(0, x) = 0, & |x| \geq L.\end{aligned}$$

Si stimi $|u(0, t)|$.

Esercizio 5 (8 punti) Si determini la soluzione $u(x, t)$ di

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} & x \in (0, 1), & t > 0 \\u(0, x) &= x, & x \in [0, 1]; & u(t, 0) = 0, & u(t, 1) = 5.\end{aligned}$$

Si calcoli il $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ per $x \in (0, 1)$ e il tempo affinché $u(\frac{1}{2}, t) = 3$.