FM2 , A.A. 2007/08, Soluzione Esame 11 Febbraio

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri in R^2 l'equazione

$$u_x + u_y = u^2$$

e sulla curva γ di equazione parametriche $x = s, y = -s$, $u = s$. Si mostri che esiste ed é unica la soluzione. Si trovi l'espressione esplicita di $u(x, y)$. Si determini il luogo dei punti nei quali la soluzione é ben definita.

Soluzione
La soluzione esiste (localmente) ed é unica poiché sulla curva γ

$$-1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Per determinare la soluzione troviamo le curve caratteristiche

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t, s) = 1\\
&\frac{d}{dt}y(t, s) = 1\\
&\frac{d}{dt}z(t, s) = z^2\\
&x(0, s) = s \qquad y(0, s) = -s \qquad z(0, s) = s.
\end{aligned}$$

Le soluzioni delle prime due equazioni sono

$$x(t, s) = s + t, \qquad y(t, s) = -s + t, \tag{1}$$

Integrando la terza si ottiene

$$z(t, s) = \frac{s}{1 - ts}. \tag{2}$$

Si osservi che la soluzione (2) esiste solo per $t \in [0, \frac{1}{s})$. Ricavando s e t da (1) si ottiene

$$s = \frac{x - y}{2}, \qquad t = \frac{x + y}{2}$$

e sostituendo in (2) otteniamo

$$u(x, y) = \frac{x - y}{2}\frac{1}{1 - \frac{x^2 - y^2}{4}} = 2\frac{x - y}{4 - (x^2 - y^2)}$$

Poiché $t \in [0, \frac{1}{s})$, la soluzione é ben definita se

$$\frac{x + y}{2} < \frac{2}{x - y}$$

diverge quando $x^2 - y^2 = 4$.

Esercizio 2 (8 punti) Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t\\
&u(x, 0) = x; \qquad u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = \cos t. \qquad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Si determini il $\lim_{t\to\infty} \max_{x\in[0,1]} u(t,x)$.

Soluzione

Poiché la condizione al bordo dipende dal tempo, conviene porre

$$u(x,t) = v(x,t) + x\cos t$$

con v soluzione di

$$\begin{aligned} &v_t = v_{xx} + x\sin t \qquad && 0 < x < 1 \qquad 0 < t \\ &v(x,0) = 0; \qquad v(0,t) = 0, \qquad && v(1,t) = 0. \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

Troviamo la soluzione v sviluppandola in serie di Fourier

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n(t) \sin n\pi x$$

con $b_n(t)$ funzioni di t da determinare. Poiché

$$x = \sum_{n\geq 1} d_n \sin n\pi x$$

con

$$d_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{n\pi} & n \quad \text{pari} \\ \dfrac{2}{n\pi} & n \quad \text{dispari} \end{cases}$$

$b_n(t)$ sono le soluzioni di

$$\begin{aligned} &b_n'(t) = -(n\pi)^2 b_n(t) + d_n \sin t \\ &b_n(0) = 0. \end{aligned}$$

La soluzione di una generica equazione ordinaria di questo tipo si trova

$$\begin{aligned} &f'(t) = -\lambda f(t) + g(t) \\ &f(0) = a \end{aligned}$$

é data da

$$f(t) = e^{-\lambda t} a + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} g(s) ds.$$

Sviluppando quindi si ottiene

$$b_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \frac{1}{(\lambda^2+1)} \left[e^{-\lambda t} + \lambda \sin t - \cos t \right], \quad \lambda = (n\pi)^2.$$

Quindi

$$u(x,t) = x\cos t + \sum_{n\geq 1} b_n(t) \sin n\pi x$$

Il limite $\lim_{t\to\infty} \max_{x\in[0,1]} u(t,x)$ non esiste. La soluzione oscilla.

Esercizio 3 (9 punti) Determinare la soluzione di

$$\begin{aligned} &u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \quad r \in (0,1), \quad \theta \in (0, \frac{1}{2}\pi); \\ &u(r,0) = 0, \quad u_r(r, \frac{1}{2}\pi) = 0 \quad r \in (0,1], \\ &u(1,\theta) = \theta, \quad \theta \in [0, \frac{1}{2}\pi]. \end{aligned}$$

Suggerimento: la funzione θ non é continua nel dominio in esame.

Soluzione Cerchiamo la soluzione come combinazione di armoniche.

$$u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n\geq 1} r^n[b_n \sin n\theta + a_n \cos n\theta]$$

Dalla condizione $u(r,0) = 0$ si deduce

$$a_0 = a_n = 0, \quad \forall n$$

Da

$$u_r(r, \frac{1}{2}\pi) = \sum_{n\geq 1} nr^{n-1} b_n \sin n\frac{1}{2}\pi,$$

si deduce che per n dispari $b_{2n+1} = 0$. Quindi

$$u(r,\theta) = \sum_{n\geq 1} r^{2n} b_{2n} \sin 2n\theta.$$

Dalla condizione iniziale

$$u(1,\theta) = \sum_{n\geq 1} b_{2n} \sin 2n\theta := \theta.$$

si deduce

$$b_{2n} := \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \theta \sin 2n\theta d\theta.$$

Esercizio 4 (5 punti) Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} \qquad && x \in R, \qquad t > 0, \\ &u(x,0) = 0, && u_t(x,0) = e^{-|x|^2}. \end{aligned}$$

Soluzione La soluzione si determina facilmente

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} e^{-y^2} dy.$$