Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

GE2 - Geometria 2, geometria euclidea e proiettiva

Tutorato II - Livia Corsi (24-10-07)

Esercizio 1. Sia Q la forma quadratica rappresentata nella base canonica $\mathbb{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ di $\mathbb{R}^3$ da $Q(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_2^2$.
(1.1) Scrivere la matrice A della forma bilineare simmetrica b associata a q.
(1.2) Verificare che il vettore $\mathbf{x} = (-1, 3, 2)$ non è b-isotropo.
(1.3) Determinare due vettori $\mathbf{y}'$ e $\mathbf{y}''$ $\in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{y}' + \mathbf{y}'' = \mathbf{e}_2$ con $\mathbf{y}' \parallel \mathbf{x}$ e $\mathbf{y}'' \perp \mathbf{x}$.
(1.4) Determinare le equazioni parametriche e cartesiane dello spazio $\mathbf{e}_2^{\perp}$ e due suoi generatori.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{C}([0,1])$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su $[0,1]$ e sia Π_n il sottospazio di $\mathcal{C}([0,1])$ dei polinomi di grado minore o uguale di n
(2.1) Date $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ mostrare che $\langle f, g\rangle := \int_0^1 \mathrm{d}x f(x)g(x)$ è un prodotto scalare.
(2.2) Determinare una base ortogonale di Π_3 rispetto al prodotto scalare definito per restrizione da $\langle , \rangle$

Esercizio 3. Dopo averne trovato una base ortogonale mediante l'algorimto di Lagrange, determinare la segnatura delle seguenti forme quadratiche su $\mathbb{R}^3$
(3.1) $Q(x, y, z) = 2x + 2yz$
(3.2) $Q(x, y, z) = y^2 + 2xz$
(3.3) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
(3.4) $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 3z^2$

Esercizio 4. Usando il metodo di Gram-Schmidt trovare una base ortonormale per le forme bilineari associate alle seguenti forme quadratiche su $\mathbb{R}^3$
(4.1) $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2xz + z^2$
(4.2) $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + y^2 + z^2$

Esercizio 5.*
(5.1) Applicare il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt all'insieme infinito di vettori di $\mathbb{R}^3$ $(1, n, n^2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(5.2) Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare standard. Si consideri un operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito da una matrice simmetrica. Dimostrare che comunque presi due autovettori con autovalori distinti essi sono ortogonali.
(5.3) Sia V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare standard e v, w due suoi vettori. Mostrare che se $|v| = |w|$ allora $(v + w) \perp (v - w)$. Dare un'interpretazione geometrica.