

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008
GE2 - Geometria 2, geometria euclidea e proiettiva

TUTORATO V - LIVIA CORSI (20-12-07)

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ consideriamo il riferimento proiettivo standard $RP(P_0, P_1, P_2, P_3, U)$, dove

$$P_0 = [1 : 0 : 0 : 0], \quad P_1 = [0 : 1 : 0 : 0], \quad P_2 = [0 : 0 : 1 : 0], \\ P_3 = [0 : 0 : 0 : 1], \quad U = [1 : 1 : 1 : 1].$$

Verificare che i cinque punti

$$Q_i = \sum_{h=0}^i P_h \quad \text{per } i = 0, 1, 2, 3$$

e

$$V = P_0 - P_1 + P_2 - P_3$$

individuano un riferimento RP' di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ e determinare le equazioni del cambiamento di riferimento. Scrivere inoltre l'equazione del piano individuato dai punti P_0, P_2, U nel nuovo riferimento RP' .

ESERCIZIO 2. Sia $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la proiettività di equazioni

$$\begin{cases} y_0 = x_0 - x_1 \\ y_1 = x_0 + 3x_1 \\ y_2 = 2x_2 \end{cases}$$

Determinare i punti fissi di f .

ESERCIZIO 3. Nel piano proiettivo reale si consideri la famiglia \mathcal{F} di coniche di equazione:

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2 - x_0^2) + \mu x_1 x_2 = 0.$$

(3.1) Si determinino le coniche degeneri della famiglia.

(3.2) Si trovino i punti comuni a tutte le coniche della famiglia.

(3.3) Si determini una proiettività $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, diversa dall'identità, che manda ogni conica della famiglia \mathcal{F} in una conica ancora appartenente alla stessa famiglia \mathcal{F} .

ESERCIZIO 4. Trovare le equazioni delle rette in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ passanti per i seguenti punti:

$$[1 : 0 : 0], \quad [0 : 1 : 0] \\ [1 : 0 : 1], \quad [0 : 1 : 1] \\ [1 : 2 : 2], \quad [3 : 1 : 4]$$

Verificare inoltre che i punti $A = [1 : 2 : 2]$, $B = [3 : 1 : 4]$, $C = [2 : -1 : 2]$ di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ sono allineati e determinare l'equazione della retta che li contiene.