Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

GE4 - Geometria Differenziale 1

TUTORATO IV - LIVIA CORSI E GIORGIA PESTRIN (26-10-07)

<u>ESERCIZIO 1.</u> Considerare la seguente funzione di tre variabili

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 \end{array}$$

(1.1) Trovare l'aperto massimale $U \subset \mathbb{R}^3$ in cui F è liscia, cioè di classe C^∞ e descrivere geometricamente il suo complementare: $\mathbb{R}^3 \setminus U$.
(1.2) Scrivere il campo gradiente ∇F e trovare i punti critici di F.
(1.3) Sia Σ il sottoinsieme dello spazio Euclideo

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 = 1\}$$

Dimostrare che Σ è una superficie liscia.
(1.4) Dimostrare che Σ è compatta, cioè un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^3$.
(1.5) Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{x}: & (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & ((\cos v + 3)\cos u, (\cos v + 3)\sin u, \sin v) \end{array}$$

è una carta locale su Σ. Descrivere $Im(\mathbf{x}) \subset \Sigma$.

<u>ESERCIZIO 2.</u> (Do Carmo, p. 80 es 7) Dimostrare che la relazione "S_1 è diffeomorfa ad S_2" è una relazione d'equivalenza sull'insieme delle superfici regolari.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Mostrare che il catenoide $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = \cosh^2 z\}$ è diffeomorfo al cilindro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\}$, esibendo un diffeomorfismo.

<u>ESERCIZIO 4.</u> Dimostrare che, date due superfici regolari S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$, un'applicazione $f : S_1 \longrightarrow S_2$ è un diffeomorfismo $\Longleftrightarrow$ f è liscia, biiettiva, e il suo differenziale df_p è un'applicazione lineare invertibile $\forall p \in S_1$

<u>ESERCIZIO 5.</u> La superficie di Scherk è la superficie di tipo grafico $S \subset \mathbb{R}^3$ data da

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right), \ (x,y) \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^2\right\}$$

Mostrare che S non può essere scritta come immagine inversa di un valore regolare.