Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

GE4 - Geometria Differenziale 1

Tutorato IX - Livia Corsi e Giorgia Pestrin (11-12-07)

Esercizio 1. Non esistono superfici Minime compatte in $\mathbb{R}^3$. Dimostrare o trovare un controesempio.

Esercizio 2. Abbiamo visto che se $p \in \Sigma$ è un massimo relativo della funzione $\delta = \|\cdot\|^2$ allora p è ellittico. Considerare la funzione δ sull'iperboloide a una falda

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0\}.$$

δ ammette un massimo assoluto? δ ammette un massimo relativo? δ ammette un minimo assoluto?

Esercizio 3. Mostrare con degli esempi che in generale in un punto di minimo per $\delta = \|\cdot\|^2 : \Sigma \to \mathbb{R}$ la curvatura di Gauss può avere segno positivo, negativo o nullo.

Esercizio 4. Mostrare che il catenoide $X_1(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$ e l'elicoide $X_2(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ sono superfici Minime, la prima è di rotazione e la seconda è rigata.

Esercizio 5. Verificare che l'iperboloide a una falda $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ è una superficie rigata nella seguente maniera: considerare le seguenti coordinate locali su Σ:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \Sigma \\ & (u, v) & \longmapsto & (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v) \end{array}$$

Sia $\gamma(u) = \phi(u, 0) = (\cos u, \sin u, 0)$ il cerchio unitario, per ogni $u = u_0$ fisato e al variare di $v \in \mathbb{R}$ la curva $\phi(u_0, v) \subset \Sigma$ è la retta che passa per il punto $\gamma(u_0) \in \mathbb{R}^3$ nella direzione del vettore $\dot{\gamma}(u_0) + \vec{k}$ è quindi tutta contenuta in Σ.

Mostrare che inoltre Σ è doppiamente rigata perché contiene anche tutte le rette per $\gamma(u_0)$ nella direzione di $-\dot{\gamma}(u_0) + \vec{k}$. Infine usare questa proprietà geometrica per dimostrare che Σ ha Curvatura di Gauss strettamente negativa.

Esercizio 6. Dimostrare che il cono $\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2,\ z > 0\}$ è localmente isometrico al piano.